(Preprint for)

J. Rojo

Topologías imprecisas dadas por métricas aleatorias

pp. 771-773 in

IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Salamanca, 1982

ACTAS DE LAS

IX JORNADAS MATEMATICAS HISPANO - LUSAS

(2)

EDICIONES UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

EXCELENTISIMA DIPUTACION PROVINCIAL DE SALAMANCA

AÑO 1982

Actas IX Jornadas Matemáticas
Hispano-Lusas, Vol. II
Universidad de Salamanca, 1982

TOPOLOGIAS IMPRECISAS DADAS POR METRICAS ALEATORIAS

Jesús Rojo García

Dpto.de Matemáticas.E.T.S. de Ing.Industriales.Valladolid.

Resumen: Las topologías imprecisas, esto es, topologías que pueden conocerse con grados crecientes de precisión, pueden generarse mediante las estructuras métricas aleatorias introducidas por A.Wald y K.Menger. Por otra parte, la t.i. dada por una (semi-) distancia aleatoria μ, se obtiene también mediante una familia (d_ε) de semidistancias definidas, de manera natural, a partir de μ.

1. La consideración de una distancia aleatoria (no necesariamente separada) en un conjunto X, tiene por objeto conseguir una topología imprecisa sobre X; en lo que respecta a las topologías imprecisas (t.i.) nos referiremos a los conceptos y notaciones de [2]. Una distancia aleatoria μ sobre X asocia a cada pareja (x,y) de puntos de X una medida de Radon positiva $\mu_{xy} \in M_1^+[0,\infty)$; representaremos por F_{xy} la correspondiente función de distribución $F_{xy}(r) = \mu_{xy}[0,r)$. Se exige que μ verifique

(1) $(\forall x \in X)\ \mu_{xx} = \delta_0$ (2) $(\forall x,y)\ \mu_{xy} = \mu_{yx}$

(δ_0 representa la medida de Dirac) y

(3) $(\forall x,y,z \in X)\ (\forall r,s>0)\quad F_{xy}(r+s) \geqslant \min(F_{xz}(r), F_{zy}(s))$

2. La propiedad (3) significa que se consideran las distancias aleatorias para la t-norma más fuerte posible, esto es, $T(\alpha,\beta) = \min(\alpha,\beta)$; véanse a este respecto las consideraciones de [3] sobre las t-normas que permiten la existencia de distancias de este género.

3. Si X es un conjunto dotado de una distancia aleatoria, $\mu:(x,y)\to\mu_{xy}$, se consideran las bolas

$$B_\varepsilon(x,r) = \{y\in X \mid F_{xy}(r) > 1-\varepsilon\}$$

para $r>0$ y $0<\varepsilon\leqslant 1$, y los filtros

$$E_x : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$

dados por

$$E_x(V) = \sup\{\varepsilon>0 \mid \exists r>0)\ B_\varepsilon(x,r)\subset V\}.$$

Por filtro sobre X entendemos una aplicación $F:\mathcal{P}(X)\to[0,1]$ tal que

$$F(\emptyset) = 0,\ F(X) = 1 \text{ y } F(A\cap B) = \min(F(A), F(B)).$$

Como puede verse en [2] existe una t.i. normal, $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$, única, para la que cada E_x es el filtro de los entornos de x.

Vamos a probar que se obtienen de manera natural semidistancias ordinarias d_ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, cuyas topologías $\mathcal{T}_\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, proporcionan una t.i. equivalente a $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$.

4. PROPOSICION

Si $0<\varepsilon\leqslant 1$ y $x,y\in X$, ponemos

$$d_\varepsilon(x,y) = \inf\{r>0 \mid y\in B_\varepsilon(x,r)\}.$$

Entonces, d_ε es una semidistancia sobre X. Además

$$0<\varepsilon'\leqslant\varepsilon\leqslant 1 \Rightarrow d_\varepsilon\leqslant d_{\varepsilon'}.$$

Dem.: Como el conjunto

$$\{r>0 \mid F_{xy}(r) > 1-\varepsilon\}$$

es no vacío, d_ε toma exclusivamente valores finitos. Es evidente que $d_\varepsilon(x,x) = 0$ y que $d_\varepsilon(x,y) = d_\varepsilon(y,x)$. Veamos que

$$d_\varepsilon(x,y)\leqslant d_\varepsilon(x,z) + d_\varepsilon(z,y).$$

Si $\lambda > d_\varepsilon(x,z) + d_\varepsilon(z,y)$, entonces $\lambda = r+s$ con $r > d_\varepsilon(x,z)$ y $s > d_\varepsilon(z,y)$, luego $z\in B_\varepsilon(x,r)$ y $z\in B_\varepsilon(y,s)$, o sea $F_{xz}(r)>1-\varepsilon$ y $F_{yz}(s) > 1-\varepsilon$. De la propiedad (3) de las distancias aleatorias se deduce entonces que

$$F_{xy}(\lambda) = F_{xy}(r+s) > 1-\varepsilon,$$

luego $y\in B_\varepsilon(x,\lambda)$ y por lo tanto $\lambda\geqslant d_\varepsilon(x,y)$; esto prueba la propiedad triangular. La implicación final no presenta problema ninguno.

5. Si τ_ε es la topología dada por d_ε, entonces

$$0<\varepsilon'\leq\varepsilon\leq 1 \Rightarrow \tau_\varepsilon \leq \tau_{\varepsilon'} ,$$

luego $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ es una t.i. sobre X. En general no será continua a la izquierda, pero proporciona de hecho la topología $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$, como probamos a continuación.

6. LEMA

Si $0<\varepsilon'<\varepsilon\leq 1$, entonces

$$\tau_\varepsilon \leq \mu_\varepsilon \leq \tau_{\varepsilon'} .$$

Dem.: Se comprueba sin dificultad que

$$B_\varepsilon(x,r) \subset \{y \;/\; d_\varepsilon(x,y)\leq r\} \;;$$

como $B_\varepsilon(x,r)$ es abierto para μ_ε (ver [2]), resulta la primera desigualdad.

Si V es un entorno de x para μ_ε, entonces $E_x(V)\geq\varepsilon>\varepsilon'$, luego existe $r>0$ tal que $B_{\varepsilon'}(x,r)\subset V$ y, por lo tanto,

$$\{y \;/\; d_{\varepsilon'}(x,y)<r\}\subset V ,$$

lo que demuestra que V es un entorno de x para $\tau_{\varepsilon'}$. Esto prueba la segunda desigualdad.

7. PROPOSICION

$(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$ y $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$ son equivalentes, o sea, $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$ es la t.i. normal asociada a $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$.

Dem.: Si A es abierto para μ_ε, con $\varepsilon>0$, entonces lo es para $\tau_{\varepsilon'}$ con $0<\varepsilon'<\varepsilon$, luego es un ε-abierto de $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$.

Si A es un ε-abierto de $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1]}$, entonces $A\in\tau_{\varepsilon'}$ para $0<\varepsilon'<\varepsilon$ y $A\in\mu_{\varepsilon'}$ para $0<\varepsilon'<\varepsilon$, luego $A\in\mu_\varepsilon$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Karl MENGER "Statistical Metrics" Proc.Nat.Acad.Sc.USA, 28(1942) p. 535-537.

[2] Jesús ROJO "Espacios Topológicos Imprecisos" (Tesis) Universidad de Valladolid (1981).

[3] B.SCHWEIZER y A.SKLAR "Statistical Metric Spaces" Pacific J.Math., 10(1960) p. 313-334.