J. Rojo
Espacios topológicos imprecisos
Tesis doctoral - Ph. D. Thesis
Doctor en Ciencias Matemáticas - Ph. D. Mathematics
Director: Antonio Pérez Gómez
July 9, 1981, Depto. de Teoría de Funciones, Facultad de Ciencias, Univ. de Valladolid

Espacios topológicos imprecisos

Jesús ROJO

Depto. de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias
Univ. de Valladolid

Jesús ROJO

Espacios topológicos imprecisos

AMS Subject Classification: 54J05

Tesis presentada para optar al
Grado de Doctor en Ciencias,
Sección de Matemáticas, por:
Jesús Rojo García

Antonio Pérez Gómez,
Catedrático de Análisis Matemático IV
de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Valladolid.

CERTIFICA:

Que la presente Memoria
'ESPACIOS TOPOLÓGICOS IMPRECISOS'
ha sido realizada bajo mi dirección
en el Departamento de Teoría de Funciones
de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Valladolid,
por D. JESÚS ROJO GARCÍA,
y para que conste en cumplimiento de la legislación vigente,
presenta y apadrina
ante la Facultad de Ciencias
de dicha Universidad
la referida Tesis.

Firmado la presente en Valladolid a 29 de mayo de 1981

ANTONIO PÉREZ GÓMEZ

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. D. Antonio Pérez Gómez, director de este trabajo. Los Dres. D. Manuel Núñez Jiménez y D. José Luis Rojo García han contribuído de forma notable en la concepción y redacción de esta memoria; agradezco su interés y colaboración, así como la de los miembros del Departamento de Teoría de Funciones de esta Facultad. Quiero también agradecer el interés de Dña. María Dolores Bragado, secretaria del Departamento, en la presentación final del trabajo.

Jesús Rojo García

Espacios topológicos imprecisos

Contenido

Introducción.

La memoria que presentamos tiene por objeto generalizar las estructuras topológicas. Vamos a exponer brevemente el alcance y la intención de la generalización a que nos referimos.

Supongamos que podemos conocer una estructura topológica con un grado creciente de precisión, en el sentido de que, con mayor seguridad, podemos clasificar como abiertos una clase menor de conjuntos. La colección de estas sucesivas aproximaciones es lo que conocemos como topología imprecisa.

En el caso en que dichas aproximaciones sean de hecho idénticas, podemos considerar la estructura como conocida y abarcar de este modo los espacios topológicos ordinarios.

Asimismo, los conceptos clásicos de topología admiten una graduación en su definición, lo que da lugar a las nociones que enunciamos. Todas ellas abarcan como caso particular el clásico, hecho que se recalca en cada ocasión.

Advirtamos que nos hemos mantenido en el campo de la teoría de conjuntos usual. Diferimos en esto de otra de las generalizaciones de la topología llevadas a cabo recientemente, la de los 'fuzzy topological spaces' (que en castellano suele traducirse por espacios topológicos difusos o borrosos) debida a Chang [1]. Los elementos de una topología difusa (fuzzy) sobre un conjunto X no son subconjuntos de X, sino lo que suele llamarse conjuntos difusos (fuzzy sets) en X. Aunque tal vez la intencionalidad de fondo sea en ambos casos la misma, la naturaleza de las estructuras es radicalmente diferente. Para Chang, la topología difusa es una estructura concreta formada por subconjuntos imprecisos. Para nosotros, la topología imprecisa será una estructura variable o, mejor, indeterminada, pero formada por subconjuntos precisos.

[1] C.L. Chang, *Fuzzy Topological Spaces*, J. Math. Anal. Appl., 24 (1968), pp. 182-190.

Salvo casos triviales, parece imposible relacionar ambas ideas. Explicaremos esto próximamante en un artículo. No hemos creído conveniente hacerlo aquí porque nos exigiría previamente una larga introducción sobre los conjuntos y las topologías difusas que no son en general conocidas salvo por los especialistas en este campo.

No hemos llevado al fin las posibilidades existentes, ya que nuestro intento era asentar las bases de la teoría, pero parecan apuntarse varias aplicaciones a casos de interés; básicamente a la descripción de fenómenos sobre los que nuestra información es incompleta.

Así, a partir de la teoría de errores clásica que trata de acotar los incrementos de la función para incrementos dados en la variable, puede concebirse un estudio análogo cuando por una parte se acepta una determinada inexactitud en la acotación y por otra se consideran funciones con un cierto grado de continuidad.

En la teoría de juegos podrían considerarse topologías asociadas a un juego, con nivel creciente de seguridad, en base a conocimientos sobre las preferencias en la elección de estrategias por alguno de los adversarios.

Por fin, pueden establecerse estructuras topológicas imprecisas en conjuntos de puntos de los que únicamente conocemos la situación en forma no bien determinada, mediante la definición de una distancia como las que consideramos en el último capítulo.

Para la lectura de esta memoria no son necesarios más que conocimientos elementales de topología general, que se encuentran en cualquiera de los numerosos textos sobre dicha materia, particularmente en los que abordan la convergencia mediante la utilización de filtros.

Antes de cada capítulo hemos hecho una breve declaración de intenciones que puede facilitar, a posteriori, la comprensión del texto.

Hemos reservado siempre los símbolos ϵ y δ para objetos cuyo campo de variación es siempre un subconjunto de $[0,1]$. Así, por ejemplo, $\epsilon < 1/2$ significa siempre $0 \leq \epsilon < 1/2$; hay que interpretar así todas las restricciones de este tipo.

Los nombres de PROPOSICIÓN, LEMA y COROLARIO poseen el sentido habitual. Se enuncian como TEOREMA aquellas proposiciones que a nuestro entender resultan más significativas o más importantes para los desarrollos posteriores.

Los capítulos se referencian con un número, los apartados con dos y los párrafos con tres. Para citar un resultado o un conjunto de ellos, pondremos entonces capítulo 3, o apartado (3.1) o párrafo (3.1.19) según los casos.

Capítulo 1

Espacios topológicos imprecisos.

Introducimos en 1.1.10 la noción de topología imprecisa. Las t.i. pueden ser indiciadas por conjuntos de una clase relativamente amplia. El objeto de esta variedad de los posibles conjuntos de índices es facilitar la introducción de topologías imprecisas. Pero inmediatamente demostramos que, de hecho, podemos siempre acudir a una t.i. teniendo $[0,1]$ como conjunto de índices (1.3.8 y 1.3.12).

Los ϵ-abiertos se introducen en (1.2.6) y poseen dos propiedades esenciales. La primera es el hecho de formar una topología (1.2.11). La segunda es la propiedad de continuidad de (1.3.5), que conviene recordar bajo la forma enunciada en (1.3.4) que es más intuitiva.

La noción de ϵ-entorno tiene poca importancia y se introduce provisionalmente hasta sustituirla por otra realmente útil: la de filtro de los entornos de un punto (5.1). La anomalía básica de esta noción de ϵ-entorno viene expuesta en el ejemplo (1.4.4).

Este sencillo ejemplo (1.4.4) nos servirá durante todo el trabajo como fuente de contraejemplos.

Por fin, la idea de t.i. accesible (1.1.10) será sobre todo importante en el capítulo 3, durante el estudio de las trazas de topologías imprecisas.

1.1 Definición de topología imprecisa.

1.1.1 Sea Ω un conjunto $\neq \emptyset$, ordenado con una relación $\leq$ (reflexiva, antisimétrica y transitiva) verificando

(o1) El orden es total.

(o2) Todo subconjunto $\mathcal{B}$ no vacío de Ω admite un extremo inferior, que es además el inferior de un subconjunto numerable de $\mathcal{B}$.

1.1.2 Ω admite un primer elemento, $\inf \Omega$. Lo representaremos por $\bar{0}$.

1.1.3 Sea $\mathcal{B} \subset \Omega$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Existe entonces $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ con

$$\omega_n \geq \omega_{n+1}$$

(lo que suele representarse poniendo $\omega_n \searrow$) y tal que

$$\inf \mathcal{B} = \inf_n \omega_n\,.$$

En efecto: por la propiedad **(o2)**, existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ con

$$\inf \mathcal{B} = \inf_n \alpha_n$$

y basta tomar

$$\omega_n = \min\{\alpha_1\,, \ldots\,, \alpha_n\}\,.$$

1.1.4 Sea $\mathcal{B} \subset \Omega$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{B}$ está acotado superiormente. Entonces $\mathcal{B}$ admite un extremo superior. En efecto: basta tomar el extremo inferior del conjunto de las cotas superiores de $\mathcal{B}$.

1.1.5 Cuando además Ω verifique

(o3) Todo subconjunto $\mathcal{B}$ no vacío de Ω admite un extremo superior, que es además el superior de un subconjunto numerable de $\mathcal{B}$,

diremos que Ω es *accesible.*

1.1.6 Ejemplo. Cualquier conjunto bien ordenado verifica **(o1)** y **(o2)**. Cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ del tipo $[x, y]$, $[x, y)$ o $[x, \infty)$ verifica también ambas propiedades.

Emplearemos con frecuencia el intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ con el orden natural. Este conjunto es además accesible.

1.1.7 Sea Ω un conjunto ordenado verificando **(o1)** y **(o2)**. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ conteniendo los intervalos de Ω. Para ello es suficiente que para cada $\omega \in \Omega$, los intervalos $[\bar{0}, \omega]$ y $[\bar{0}, \omega)$ estén en $\mathcal{A}$.

Sea p una probabilidad sobre el espacio probabilizable $(\Omega, \mathcal{A})$, es decir, una aplicación

$$p\,:\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$$

verificando

(p1) $p(\Omega) = 1$.

(p2) Si $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y los $\mathcal{B}_n$ son dos a dos disjuntos

$$p(\bigcup_1^\infty \mathcal{B}_n) = \sum_{n=1}^\infty p(\mathcal{B}_n)\,.$$

El cuarteto $(\Omega, \leq, \mathcal{A}, p)$ que representaremos simplemente por Ω, diremos que es un *conjunto estructurado de índices.*

1.1.8 Ejemplo. Un conjunto $\Omega = \{1\}$ con un solo elemento, admite una única estructura como conjunto estructurado de índices.

1.1.9 Ejemplo. $[0, 1]$ con su orden natural, la σ-álgebra boreliana y la medida de Lebesgue, es un conjunto estructurado de índices. Es el más importante que utilizaremos. Salvo advertencia contraria, consideraremos siempre $[0, 1]$ con esta estructura.

1.1.10 DEFINICIÓN. Sea X un conjunto. Una *topología imprecisa* (términos que abreviaremos en adelante escribiendo t.i.) sobre X es una familia

$$(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

de topologías sobre X, indiciada por un conjunto estructurado de índices Ω, y verificando

(ti1) $\omega \leq \omega' \Rightarrow \tau_\omega \geq \tau_{\omega'}$.

El par $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ diremos entonces que es un *espacio topológico impreciso* (abreviado e.t.i.)

Una t.i. $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sobre X, o el e.t.i. $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ diremos que es *accesible* cuando lo sea Ω.

1.1.11 Si $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es un t.i., se verifica de forma inmediata que

$$\tau_\omega > \tau_{\omega'} \Rightarrow \omega < \omega'$$

1.1.12 Ejemplo. Sea X un conjunto, τ una topología sobre X. El conjunto $\{1\}$ admite (1.1.8) una única estructura como conjunto estructurado de índices.

La familia indiciada por $\{1\}$ cuyo único elemento es τ es una t.i. accesible. La representaremos también por τ.

Et e.t.i. (X, τ) diremos que es un espacio topológico ordinario.

1.2 ϵ-abiertos de una topología imprecisa.

1.2.1 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y sea $A \subset X$. Por $A \in \tau_\omega$ entenderemos que A es un abierto de τ_ω. Consideremos el conjunto

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega \,|\, A \in \tau_\omega\}\,.$$

Obviamente, Ω_A es de una de las formas

$$\emptyset, \Omega, [\bar{0}, \omega] \text{ o } [\bar{0}, \omega)$$

y en particular tenemos siempre

$$\Omega_A \in \mathcal{A}$$

1.2.2 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. Es inmediato comprobar que:

- Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de X

$$\Omega_{\cup_i A_i} \supset \bigcap_i \Omega_{A_i}\,.$$

- Si A_1 y A_2 son dos subconjuntos de X

$$\Omega_{A_1\cap A_2} \supset \Omega_{A_1} \cap \Omega_{A_2}\,.$$

Además

$$\Omega_\emptyset = \Omega_X = \Omega\,.$$

1.2.3 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y consideremos la aplicación

$$\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$

dada por

$$\alpha(A) = p(\Omega_A)\,.$$

De forma inmediata

$$\alpha(\emptyset) = \alpha(X) = 1\,.$$

Veamos a continuación dos importantes propiedades de α.

1.2.4 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces

$$\alpha(\bigcup_i A_i) \geq \inf_{i\in I} \alpha(A_i)\,.$$

Como

$$\alpha(\bigcup A_i) = p(\Omega_{\bigcup A_i}) \quad \text{y} \quad \Omega_{\bigcup A_i} \supset \bigcap \Omega_{A_i}\,,$$

la proposición es evidente cuando existe $i_0 \in I$ tal que

$$\bigcap \Omega_{A_i} = \Omega_{A_{i_0}}\,.$$

Supondremos pues que no existe tal i_0. Entonces tenemos

$$(\forall\, i) \quad \Omega_{A_i} \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad (\exists\, i) \quad \Omega_{A_i} \neq \Omega\,.$$

Sea J el subconjunto (no vacío) de I formado por los $i \in I$ tales que $\Omega_{A_i} \neq \Omega$.

Para cada $i \in J$, Ω_{A_i} es de la forma

$$[\bar{0}, \omega_i] \text{ o } [\bar{0}, \omega_i)$$

con $\omega_i \in \Omega$.

Consideremos entonces

$$\inf_{i\in J} \omega_i\,.$$

Con la suposición hecha, necesariamente se verifica

$$(\forall\, i \in J) \quad \inf_{j \in J} \omega_j < \omega_i\,.$$

Aplicando (1.1.3) existe $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que

$$\omega_{i_n} \searrow \qquad \text{y} \qquad \inf_{i\in J} \omega_i = \inf_n \omega_{i_n}\,.$$

Se tiene que

$$(\forall\, i \in J)(\exists\, n) \quad \omega_{i_n} < \omega_i\,,$$

luego

$$(\forall\, i \in J)(\exists\, n) \quad \Omega_{A_{i_n}} \subset \Omega_{A_i}$$

y en consecuencia

$$\bigcap_{i\in I} \Omega_{A_i} = \bigcap_n \Omega_{A_{i_n}} \qquad \text{y} \qquad \inf_{i\in I} p(\Omega_{A_i}) = \inf_n p(\Omega_{A_{i_n}})\,,$$

luego

$$\begin{aligned} \alpha(\bigcup A_i) &= p(\Omega_{\bigcup A_i}) \\ &\geq p(\bigcap_n \Omega_{A_{i_n}}) \\ &= \inf_n p(\Omega_{A_{i_n}}) \\ &= \inf_{i\in I} p(\Omega_{A_i}) \\ &= \inf_{i\in I} \alpha(A_i)\,. \end{aligned}$$

1.2.5 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y A_1 y A_2 subconjuntos de X. Entonces

$$\alpha(A_1 \cap A_2) \geq \min(\alpha(A_1), \alpha(A_2))\,.$$

Pues

$$\Omega_{A_1} \cap \Omega_{A_2} = \Omega_{A_1} \qquad \text{o} \qquad \Omega_{A_1} \cap \Omega_{A_2} = \Omega_{A_2}\,.$$

1.2.6 DEFINICIÓN. Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $A \subset X$ y $\epsilon \in [0,1]$. Diremos que A es un *ϵ-abierto* de X o de la t.i. $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ cuando

$$\alpha(A) \geq \epsilon\,.$$

Un 1-abierto diremos simplemente que es un *abierto*.

1.2.7 Ejemplo. Sea (X,τ) un espacio topológico ordinario (1.1.12). Cualquiera que sea $\epsilon > 0$, los ϵ-abiertos de (X,τ) coinciden con los abiertos de τ en el sentido ordinario. En particular un subconjunto de X es un abierto en el sentido de la definición precedente si y sólo si lo es en el sentido ordinario.

1.2.8 Ejemplo. Un abierto de $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ puede no ser abierto para todas las topologías τ_ω.

Así, consideremos $\Omega = \{0,1\}$ con el orden natural, la σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ y la probabilidad

$$p(\emptyset) = p(\{1\}) = 0\,, \qquad p(\{0\}) = p(\Omega) = 1\,,$$

y el e.t.i.

$$(\mathbb{R}, \{\tau_0\,,\, \tau_1\})\,,$$

en donde τ_0 es la topología discreta de $\mathbb{R}$ y τ_1 la topología grosera.

Cualquier subconjunto dr $\mathbb{R}$ es un 1-abierto, pero sólo $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son a la vez abiertos para τ_0 y τ_1.

1.2.9 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y $\epsilon, \epsilon' \in [0,1]$ con $\epsilon' < \epsilon$. Entonces todo ϵ-abierto es ϵ'-abierto.

1.2.10 Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X.

$\emptyset$ y X son abiertos, luego ϵ-abiertos cualquiera que sea $\epsilon \in [0,1]$.

Sea $\epsilon \in [0,1]$. Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de ϵ-abiertos, entonces aplicando (1.2.4) resulta que $\bigcup A_i$ es también un ϵ-abierto.

Si A_1 y A_2 son ϵ-abiertos, también lo es $A_1 \cap A_2$ (1.2.5). Hemos demostrado así la

1.2.11 PROPOSICIÓN

Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X y $\epsilon \in [0,1]$. El conjunto de los ϵ-abiertos para dicha t.i. es una topología sobre X.

1.2.12 Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X. Para cada $\epsilon \in [0,1]$ designemos por $\mathring{\tau}_\epsilon$ la topología sobre X formada por los ϵ-abiertos de $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$.

Entonces (1.2.9)

$$(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$$

es una t.i. accesible sobre X.

En particular $\mathring{\tau}_0$ es la topología discreta sobre X.

1.2.13 Ejemplo. Sea (X,τ) un espacio topológico ordinario y

$$(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$$

la t.i. asociada según el párrafo precedente. $\mathring{\tau}_0$ es la topología discreta y, teniendo en cuenta (1.2.7), para cada $\epsilon > 0$

$$\mathring{\tau}_\epsilon = \tau\ .$$

1.3 Topologías imprecisas normales.

1.3.1 DEFINICIÓN. Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X. Para cada $\omega_0 \in \Omega$ tenemos

$$\sup_{\omega_0<\omega} \tau_\omega \le \tau_{\omega_0} \le \inf_{\omega<\omega_0} \tau_\omega\ .$$

Diremos que $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es i-*continua* cuando para cada $\omega_0 \in \Omega$ tal que $\omega_0 = \sup[\bar{0},\omega_0)$

$$\tau_{\omega_0} = \inf_{\omega<\omega_0} \tau_\omega\ ,$$

y diremos que $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es d-*continua* cuando para cada $\omega_0 \in \Omega$ tal que $\omega_0 = \inf(\omega_0\, , \rightarrow)$

$$\tau_{\omega_0} = \sup_{\omega_0<\omega} \tau_\omega\ .$$

1.3.2 Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X. $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es i-continua si y sólo si para cada $\omega_o \in \Omega$ y cada $\mathcal{B} \subset [\bar{0}, \omega_0)$ tal que $\omega_0 = \sup \mathcal{B}$

$$\tau_{\omega_0} = \inf_{\omega\in\mathcal{B}} \tau_\omega \, .$$

Análoga propiedad es cierta para la d-continuidad.

1.3.3 PROPOSICIÓN

Sea $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ una t.i. sobre X indiciada por $[0,1]$ (1.1.9). Son equivalentes

(i) $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es i-continua;

(ii) Para cada $\epsilon > 0$ y cada sucesión estrictamente creciente $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ tal que $\epsilon_n \to \epsilon$

$$\tau_\epsilon = \inf_n \tau_{\epsilon_n}$$

Existe una equivalencia análoga para la d-continuidad.

1.3.4 El teorema siguiente expresa que si A es un ϵ'-abierto de $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ para cada $\epsilon' < \epsilon$, también es un ϵ-abierto.

1.3.5 TEOREMA

Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X. Para cada $\epsilon \in [0,1]$ sea $\mathring{\tau}_\epsilon$ la topología sobre X formada por los ϵ-abiertos. Entonces la t.i.

$$(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$$

es i-continua.

Sea $\epsilon > 0$. Si

$$A \in \inf_{\epsilon'<\epsilon} \mathring{\tau}_{\epsilon'} \, ,$$

entonces

$$(\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad A \in \mathring{\tau}_{\epsilon'}$$

o sea

$$(\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad \alpha(A) \geq \epsilon' ,$$

luego

$$\alpha(A) \geq \epsilon$$

y $A \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon$. Esto demuestra que

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon = \inf_{\epsilon' < \epsilon} \overset{\circ}{\tau}_{\epsilon'} \ .$$

1.3.6 En general, sin embargo $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ no es d-continua. Basta considerar el ejemplo (1.2.13) para una topología τ que no sea la topología discreta sobre X. En este caso, la d-continuidad no se produce únicamente en 0. El ejemplo que sigue, muestra que la anomalía puede encontrarse en índices distintos de 0.

1.3.7 Ejemplo. Sea $\Omega = \{0, 1\}$ con el orden natural, la σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ y la probabilidad

$$p(\emptyset) = 0 \,, \qquad p(\{0\}) = p(\{1\}) = \frac{1}{2} \,, \qquad p(\Omega) = 1 \,.$$

Consideremos el e.t.i. $(\mathrm{I\!R}, \{\tau_0 \,, \tau_1\})$, en donde τ_0 es la topología discreta de $\mathrm{I\!R}$ y τ_1 la topología grosera. En la correspondiente t.i. $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon = \begin{cases} \tau_0 & \text{para} \ \ 0 \leq \epsilon \leq 1/2 \,, \\ \tau_1 & \text{para} \ \ 1/2 < \epsilon \leq 1 \,, \end{cases}$$

luego $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ no es d-continua (en $\epsilon = 1/2$).

1.3.8 DEFINICIÓN. Una t.i. $(\tau_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ sobre un conjunto X indiciada por $[0, 1]$, i-continua y tal que τ_0 sea la topología discreta de X diremos que es una t.i. *normal.*

Sea $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$ una t.i. sobre X y para cada $\epsilon \in [0, 1]$ sea $\overset{\circ}{\tau}_\epsilon$ la topología formada por los ϵ-abiertos de $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$. Entonces $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ es una t.i. normal que llamaremos *t.i. normal asociada* a $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$.

Toda t.i. normal es en particular accesible.

1.3.9 Ejemplo. Si (X,τ) es un espacio topológico ordinario, la t.i. normal asociada a τ , $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$, viene dada por

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathring{\tau}_\epsilon = \tau$$

y $\mathring{\tau}_0$ la topología discreta (1.2.13).

1.3.10 TEOREMA

Sea $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ una t.i. normal sobre X. Sea $A \subset X$ y $\epsilon \in [0,1]$. A es un ϵ-abierto si y sólo si $A \in \tau_\epsilon$.

Pongamos $I = [0,1]$. Si $A \in \tau_\epsilon$, entonces

$$I_A \supset [0,\epsilon]$$

(I_A se entiende en el sentido de 1.2.1), luego

$$\alpha(A) \geq \epsilon$$

y A es un ϵ-abierto.

Recíprocamente, supongamos que A es un ϵ-abierto y $\epsilon > 0$. Entonces

$$\alpha(A) \geq \epsilon$$

luego $I_A \supset [0,\epsilon]$, o sea

$$(\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad A \in \tau_{\epsilon'}$$

y

$$A \in \inf_{\epsilon' < \epsilon} \tau_{\epsilon'} = \tau_\epsilon\,.$$

Por otra parte si A es on 0-abierto, $A \in \tau_0$, pues τ_0 es la topología discreta.

1.3.11 COROLARIO

Sea $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ una t.i. normal sobre X. Entonces $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es su propia t.i. normal asociada.

1.3.12 COROLARIO

Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X y $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Los ϵ-abiertos son los mismos para $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$.

1.4 ϵ-cerrados y ϵ-entornos.

1.4.1 DEFINICIÓN. Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $\epsilon\in[0,1]$. Sea $A\subset X$; diremos que A es un ϵ-*cerrado* de X o de la t.i. $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$, cuando $\mathcal{C}A$ sea un ϵ-abierto, es decir, cuando sea un cerrado de $\mathring{\tau}_\epsilon$. Cuando A sea 1-cerrado, diremos que es *cerrado*.

Sea $V\subset X$ y $x\in X$, diremos que V es un ϵ-*entorno de* x para $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$, cuando exista un ϵ-abierto A tal que

$$x\in A\subset V\,,$$

es decir, cuando V sea un entorno de x para $\mathring{\tau}_\epsilon$.

1.4.2 Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $A\subset X$, $\epsilon\in[0,1]$. Consideremos el conjunto (de $\mathcal{A}$)

$$\Omega'_A=\{\omega\in\Omega\,|\,A \text{ es cerrado para } \tau_\omega\}\,.$$

Entonces, A es ϵ-cerrado si y sólo si

$$p(\Omega'_A)\geq\epsilon\,.$$

1.4.3 Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $V\subset X$, $x\in X$, $\epsilon\in[0,1]$. Consideremos el conjunto (de $\mathcal{A}$)

$$\Omega_{V,x}=\{\omega\in\Omega\,|\,V \text{ es un entorno de } x \text{ por } \tau_\omega\}\,.$$

Si V es un ϵ-entorno de x, entonces

$$p(\Omega_{V,x})\geq\epsilon\,.$$

En efecto, sea $A \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon$ tal que

$$x \in A \subset X\,.$$

Como

$$\Omega_A \subset \Omega_{V,x}\,,$$

resulta

$$p(\Omega_{V,x}) \geq p(\Omega_A) = \alpha(A) \geq \epsilon\,.$$

Sin embargo, es posible que $p(\Omega_{V,x}) \geq \epsilon$ sin que V sea un ϵ-entorno de x, y ello incluso cuando la t.i. es normal, como muestra el ejemplo siguiente.

1.4.4 Ejemplo. Recordemos que si X es un conjunto, $A \subset X$ y τ una topología sobre A, llamamos 'extensión trivial' de τ a X a la topología sobre X

$$\tau \cup X\,.$$

Si $\epsilon \in (0,1)$ pongamos

$$t_\epsilon = \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$$

y designemos por I_ϵ el intervalo abierto de $\mathbb{R}$

$$I_\epsilon = (-t_\epsilon, t_\epsilon)\,.$$

Obsérvese que

$$t_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \infty \qquad \text{y} \qquad t_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 1]{} 0\,.$$

Para $\epsilon \in (0,1)$ designamos por τ_ϵ la topología sobre $\mathbb{R}$ que es la extensión trivial de la topología usual de I_ϵ.

Designamos por τ_0 la topología discreta de $\mathbb{R}$ y por τ_1 la topología grosera.

$(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es una t.i. sobre $\mathbb{R}$, veamos que es normal. Sea $\epsilon \in (0,1)$ y A un abierto para $\inf_{\epsilon'<\epsilon} \tau_{\epsilon'}$. Si $A = \mathbb{R}$, evidentemente $A \in \tau_\epsilon$. Si $A \neq \mathbb{R}$, entonces A es un abierto de $\mathbb{R}$ contenido en $I_{\epsilon'}$ para cada $\epsilon' < \epsilon$, luego contenido en I_ϵ y $A \in \tau_\epsilon$.

Sea A un abierto para $\inf_{\epsilon'<1} \tau_{\epsilon'}$. Si $A = \mathbb{R}$, $A \in \tau_1$. Si $A \neq \mathbb{R}$, A es un abierto de $\mathbb{R}$ contenido en $I_{\epsilon'}$ para cada $\epsilon' < 1$, luego $A = \emptyset$ y $A \in \tau_1$.

Como $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es normal, es su propia t.i. normal asociada.

Tomemos $V = [-1,1]$ y $x = 0$. Para cada $\epsilon \in [0,1)$, V es un entorno de 0 para τ_ϵ, luego

$$\Omega_{V,0} = [0,1)$$

y

$$p(\Omega_{V,0}) = 1\,;$$

sin embargo V no es un 1-entorno de 0, pues el único 1-entorno de 0 es $\mathbb{R}$.

1.4.5 Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $V \subset X$ y $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$. Acabamos de ver que es posible que V sea un ϵ'-entorno de x para cada $\epsilon' < \epsilon$, sin que sea un ϵ-entorno de x. Sin embargo si $A \subset X$ y A es ϵ'-abierto para cada $\epsilon' < \epsilon$, A es un ϵ-abierto y también si A es ϵ'-cerrado para cada $\epsilon' < \epsilon$, A es un ϵ-cerrado (1.3.4).

Capítulo 2

Comparación de topologías imprecisas.

Dos t.i. cuyos conjuntos de índices sean completamente dispares pueden sin embargo representar esencialmente lo mismo. La mejor muestra de esta situación es hasta ahora el corolario (1.3.12). Vamos pues a considerar equivalentes (2.2.5) dos t.i. cuyos ϵ-abiertos sean los mismos para cada $\epsilon \in [0, 1]$.

Vemos que, gracias a esta noción de equivalencia, podemos limitarnos en el fondo a considerar las t.i. normales (1.3.8). La variedad de los conjuntos de índices deja así de ser un inconveniente a la hora de someter las t.i. a un tratamiento general.

Las aplicaciones que permiten formalizar la equivalencia de t.i. son las aplicaciones continuas (2.1.13). Abordamos sin embargo el estudio de aplicaciones continuas de un tipo a la vez más general y más natural: las aplicaciones Φ-continuas (2.1.13). Un caso particular de éstas, el de las aplicaciones ϵ-continuas, será el más interesante. La ϵ-continuidad puede interpretarse como una continuidad 'suficiente cuando nos conformamos con un nivel de seguridad ϵ'.

Algunos resultados (2.1.20 y 2.2.3) generalizan proposiciones clásicas.

2.1 Aplicaciones Φ-continuas.

2.1.1 Sean $(X, (\tau_\omega)_{\omega \in \Omega})$ y $(Y, (\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ dos e.t.i. y $f : X \to Y$ una aplicación. Si $\omega \in \Omega$ y $\lambda \in \Lambda$ consideremos la propiedad

(ω-λ) Para cada abierto B de μ_λ, $f^{-1}(B)$ es un abierto de τ_ω.

Si f posee la propiedad (ω-λ) y si $\omega' \leq \omega$ y $\lambda' \geq \lambda$, entonces f posee también la propiedad $(\omega'\text{-}\lambda')$.

2.1.2 Ejemplo. Si (X, τ) y (Y, μ) son dos espacios topológicos ordinarios y $f : X \to Y$ una aplicación, la propiedad (1-1), en donde 1 es el único índice de las t.i. τ y μ (1.1.12), equivale a la continuidad de f para las topologías ordinarias τ y μ.

2.1.3 Fuera del ejemplo precedente, la propiedad $(\omega\text{-}\lambda)$ carace de interés, al no tener significado probabilístico alguno. Una noción más importante es la que sigue.

2.1.4 DEFINICIÓN. Sean $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ y $(Y, (\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ dos e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ y $(\mathring{\mu}_\delta)_{\delta\in[0,1]}$ las correspondientes t.i. normales asociadas. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Si $\epsilon, \delta \in [0,1]$ consideramos la *propiedad* $(\epsilon\text{-}\delta)$:

$(\epsilon\text{-}\delta)$ Para cada δ-abierto B de Y, $f^{-1}(B)$ es un ϵ-abierto de X,

o sea, f posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\delta)$ cuando f es una aplicación continua para las topologías ordinarias $\mathring{\tau}_\epsilon$ de X y $\mathring{\mu}_\delta$ de Y.

Si f posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\delta)$ y si $\epsilon' \leq \epsilon$ y $\delta' \geq \delta$, entonces f posee también la propiedad $(\epsilon'\text{-}\delta')$.

f posee siempre la propiedad $(0\text{-}\delta)$ cualquiera que sea $\delta \in [0,1]$.

2.1.5 Si $(X, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ y $(Y, (\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ son e.t.i. dotados de t.i. normales y $f : X \to Y$ una aplicación, las propiedades $(\epsilon\text{-}\delta)$ para cada $\epsilon, \delta \in [0,1]$ significan lo mismo en el sentido de (2.1.1) y en el de (2.1.4).

Sin embargo, en el caso general, la única relación es la siguiente, cuya demostración omitimos por ser inmediata:

2.1.6 PROPOSICIÓN

Sean $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ y $(Y, (\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Designemos por p, p' las probabilidades respectivas de Ω y Λ.

a) Si f posee la propiedad $(\omega\text{-}\lambda)$ y si

$$p'[\bar{0}, \lambda) < \delta \qquad \text{y} \qquad p'[\bar{0}, \omega] \geq \epsilon$$

entonces f posee la propiedad (ϵ-δ).

a) Si f posee la propiedad (ϵ-δ) y si

$$p'[\bar{0}, \lambda] \geq \delta \qquad \text{y} \qquad p'[\bar{0}, \omega) < \epsilon$$

entonces f posee la propiedad (ω-λ).

2.1.7 Ejemplo. Sean X, Y dos e.t.i. Si X es un espacio topológico ordinario y $\delta \in [0,1]$, las aplicaciones $f : X \to Y$ que poseen la propiedad (ϵ-δ) son las mismas, cualquiera que sea $\epsilon > 0$.

Si Y es un espacio topológico ordinario y $\epsilon \in [0,1]$, las aplicaciones $f : X \to Y$ que poseen la propiedad (ϵ-δ) son las mismas, cualquiera que sea $\delta > 0$.

Por fin, si X e Y son espacios topológicos ordinarios, las aplicaciones $f : X \to Y$ que poseen la propiedad (ϵ-δ) son las mismas, cualquiera que sean $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, y son justamente las aplicaciones continuas en el sentido tradicional.

2.1.8 Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$. Hemos visto en (2.1.4) que f siempre posee alguna propiedad (ϵ-δ). Vamos a plantearnos el problema de encontrar 'los mejores' ϵ y δ para los que f posee (ϵ-δ), o sea el mayor ϵ y el menor δ posibles.

2.1.9 Fijemos $\epsilon \in [0,1]$. Puede no existir ningun $\delta \in [0,1]$ tal que f posea (ϵ-δ). La existencia de tal δ es por otra parte equivalente a que f posea (ϵ-1). Supongamos incluso que f posea (ϵ-1), y sea

$$\delta_0 = \inf\{\delta \mid f \text{ posee } (\epsilon\text{-}\delta)\}\,.$$

En general, f no posee (ϵ-δ_0). Esto es debido al hecho de que la t.i. normal asociada a Y no es en general d-continua.

El ejemplo (2.1.7) nos proporciona de forma sencilla casos en los que tales situaciones se presentan.

2.1.10 Fijemos $\delta \in [0,1]$. Ahora, el conjunto

$$\{\epsilon \,|\, f \text{ posee } (\epsilon\text{-}\delta)\}$$

es no vacío y, además, si ϵ_0 es su extremo superior, f posee aún $(\epsilon\text{-}\delta_0)$.

Para $\delta \in [0,1]$ representaremos dicho extremo superior por

$$\Phi_f(\delta)\,,$$

que es pues el máximo de los $\epsilon \in [0,1]$ tales que f posee $(\epsilon\text{-}\delta)$. Pondremos además

$$\Phi_f(0) = 0$$

(una explicación del tratamiento anómalo del caso $\delta = 0$ se encuentra en la introducción al capítulo 5). La función

$$\begin{aligned} \Phi_f \,:\, [0,1] &\to [0,1] \\ \delta &\to \Phi_f(\delta) \end{aligned}$$

así definida recibirá el nombre de *módulo de continuidad de* f.

Tenemos, de manera inmediata:

2.1.11 PROPOSICIÓN

Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, Φ_f su módulo de continuidad.

a) Cualquiera que sea $\delta \in [0,1]$, f posee $(\Phi_f(\delta)\text{-}\delta)$.

b) Sea $\delta > 0$. f posee $(\epsilon\text{-}\delta)$ si y sólo si $\epsilon \leq \Phi_f(\delta)$.

c) Φ_f es creciente.

2.1.12 Veamos algunas notaciones que emplearemos en éste y en sucesivos capítulos.

$\mathcal{M}$ representará el conjunto de las aplicaciones

$$\Phi \,:\, [0,1] \to [0,1]$$

crecientes y tales que $\Phi(0) = 0$. Todo módulo de continuidad es pues un elemento de $\mathcal{M}$.

Para cada $\epsilon \in [0,1]$, representaremos por i_ϵ el elemento de $\mathcal{M}$ definido por

$$i_\epsilon(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \leq \epsilon \\ \delta & \text{si } \delta > \epsilon \,. \end{cases}$$

En particular, i_0 es la aplicación idéntica de $[0,1]$ en sí mismo, i_1 es la aplicación idénticamente nula. Si $\epsilon \leq \epsilon'$ tenemos $i_\epsilon \geq i_{\epsilon'}$. También tenemos

$$i_\epsilon \circ i_{\epsilon'} = i_{\epsilon'} \circ i_\epsilon = i_{\max(\epsilon,\epsilon')} \,.$$

2.1.13 DEFINICIÓN. Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Sea $\Phi \in \mathcal{M}$. Diremos que f es Φ-*continua* cuando para cada $\delta \in [0,1]$, f posea la propiedad $(\Phi_f(\delta)$-$\delta)$.

Entonces f es Φ-continua si y sólo si

$$\Phi \leq \Phi_f \,.$$

En particular f es Φ_f-continua. Más exactamente Φ_f es la mayor de las funciones $\Phi \in \mathcal{M}$ tales que f es Φ-continua.

Sea $\epsilon \in [0,1]$. Diremos que f es ϵ-*continua* cuando f sea i_ϵ-continua.

f es siempre 1-continua. Cuando f sea 0-continua, diremos simplemente que f es *continua*.

Sea $\epsilon \in [0,1]$. Son equivalentes:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } f \text{ es } \epsilon\text{-continua;} \\ &\text{(ii) } (\forall\, \delta > \epsilon) \quad \Phi_f(\delta) \geq \delta\,; \\ &\text{(iii) } (\forall\, \epsilon' > \epsilon) \quad f \text{ posee } (\epsilon'\text{-}\epsilon')\,. \end{aligned}$$

Si f es ϵ-continua y $\epsilon \leq \epsilon'$, f es ϵ'-continua.

2.1.14 Ejemplo. Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Si X es un espacio topológico ordinario, entonces Φ_f es la función característica de un intervalo del tipo $(\delta, 1]$ o $[\delta, 1]$, eventualmente vacío.

Si Y es un espacio topológico ordinario, Φ_f es constante sobre $(0,1]$.

Si X e Y son espacios topológicos ordinarios, Φ_f es idénticamente nula cuando f no es continua en el sentido ordinario, y Φ_f es la función característica de $(0,1]$ cuando f es continua en el sentido ordinario.

Si X e Y son espacios topológicos ordinarios, entonces f es continua en el sentido de (2.1.13) si y sólo si lo es en el sentido ordinario.

2.1.15 Como veremos en (5.3.9), sólo las funciones $\Phi \in \mathcal{M}$ que sean continuas a la izquierda van a permitirnos relacionar bien la Φ-continuidad global y local. Si $\Phi \in \mathcal{M}$, son equivalentes:

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \Phi \text{ es continua a la izquierda;} \\ &\text{(ii) } \Phi \text{ es semicontinua inferiormente;} \\ &\text{(iii) } (\forall\, \delta > 0) \quad \Phi(\delta) = \sup\nolimits_{\delta' < \delta} \Phi(\delta'). \end{aligned}$$

Representaremos por $\mathcal{R}$ el conjunto de las funciones $\Phi \in \mathcal{M}$ que son continuas a la izquierda. En particular, si $\epsilon \in [0,1]$, $i_\epsilon \in \mathcal{R}$. Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{R}$, entonces $\Phi \circ \Phi' \in \mathcal{R}$,

2.1.16 Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. El extremo superior $\bar{\Phi}_f$ de las funciones $\Phi \in \mathcal{R}$ tales que f sea Φ-continua, es aún una función de R y f es $\bar{\Phi}_f$-continua.

$\bar{\Phi}_f$ es pues la mayor de las funciones $\Phi \in \mathcal{R}$ tales que f es Φ-continua. Daremos a $\bar{\Phi}_f$ el nombre de *módulo regular de continuidad de f*.

Evidentemente

$$\bar{\Phi}_f < \Phi_f$$

y la igualdad es cierta si y sólo si $\Phi_f \in \mathcal{R}$.

Si $\Phi \in \mathcal{R}$, entonces f es Φ-continua si y sólo si

$$\Phi \leq \bar{\Phi}_f .$$

En particular, f es ϵ-continua si y sólo si

$$i_\epsilon \leq \bar{\Phi}_f .$$

2.1.17 Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces el módulo regular de continuidad $\bar{\Phi}_f$ de f se obtiene a partir del módulo de continuidad Φ_f, poniendo $\bar{\Phi}_f(0) = 0$ y para cada $\delta > 0$

$$\bar{\Phi}_f(\delta) = \sup_{\delta' < \delta} \Phi_f(\delta') .$$

En efecto, poniendo

$$\Phi(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad (\forall\, \delta > 0) \quad \Phi(\delta) = \sup_{\delta' < \delta} \Phi_f(\delta')$$

es inmediato que $\Phi \in \mathcal{R}$ y $\Phi \leq \Phi_f$, lo que implica que

$$\Phi \leq \bar{\Phi}_f \, .$$

Por otra parte, como $\bar{\Phi}_f \leq \Phi_f$, entonces si $\delta > 0$,

$$(\forall\, \delta' < \delta) \quad \bar{\Phi}_f(\delta') \leq \Phi_f(\delta') \, ,$$

luego

$$\bar{\Phi}_f(\delta) = \sup_{\delta' < \delta} \bar{\Phi}_f(\delta') \leq \sup_{\delta' < \delta} \Phi_f(\delta') = \Phi(\delta) \, ,$$

lo que demuestra que

$$\bar{\Phi}_f \leq \Phi \, .$$

2.1.18 LEMA

Sean X, Y, Z tres e.t.i. y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Sean $\epsilon, \delta, \gamma \in [0, 1]$. Si f posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\delta)$ y g posee la propiedad $(\delta\text{-}\gamma)$, entonces $g \circ f$ posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\gamma)$.

2.1.19 PROPOSICIÓN

Sean X, Y, Z e.t.i. y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Representemos por Φ_f,Φ_g,$\Phi_{g \circ f}$ los módulos de continuidad y por $\bar{\Phi}_f$,$\bar{\Phi}_g$,$\bar{\Phi}_{g \circ f}$ los módulos de continuidad regulares de f,g y $g \circ f$. Tenemos

$$\Phi_{g \circ f} \geq \Phi_f \circ \Phi_g \, ;$$

$$\bar{\Phi}_{g \circ f} \geq \bar{\Phi}_f \circ \bar{\Phi}_g \, .$$

Si $\gamma > 0$, entonces g posee $(\Phi_g(\gamma)$-$\gamma)$ y f posee $(\Phi_f \circ \Phi_g(\gamma)$-$\Phi_g(\gamma))$ luego $g \circ f$ posee $(\Phi_f \circ \Phi_g(\gamma)$-$\gamma)$. Aplicando entonces (2.1.11b) se obtiene

$$\Phi_{g \circ f} \geq \Phi_f \circ \Phi_g \,.$$

Por otra parte (2.1.15) , $\bar{\Phi}_f \circ \bar{\Phi}_g \in \mathcal{R}$ y

$$\bar{\Phi}_f \circ \bar{\Phi}_g \leq \Phi_f \circ \Phi_g \leq \Phi_{g \circ f} \,,$$

luego

$$\bar{\Phi}_{g \circ f} \geq \bar{\Phi}_f \circ \bar{\Phi}_g \,.$$

2.1.20 COROLARIO

Sean X, Y, Z e.t.i. y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Sean $\Phi, \Phi' \in \mathcal{M}$; si f es Φ-continua y g es Φ'-continua, entonces $g \circ f$ es $\Phi \circ \Phi'$-continua.

Sean $\epsilon, \epsilon' \in [0, 1]$ y $\epsilon'' = \max(\epsilon, \epsilon')$; si f es ϵ-continua y g es ϵ'-continua, entonces $g \circ f$ es ϵ''-continua.

2.1.21 El ejemplo siguiente muestra que las desigualdades de la proposición (2.1.19) son, en general, estrictas.

2.1.22 Ejemplo. Sea X un conjunto, τ la topología grosera sobre X y μ una topología sobre X con $\mu \neq \tau$. Sea $i : X \to X$ la aplicación idéntica. Sea Y un e.t.i. cualquiera y $g : X \to Y$ una aplicación constante. Consideremos el diagrama

$$(X, \tau) \ \underset{g \circ i = g}{\xrightarrow{\ \overset{i}{\to} (X, \mu) \overset{g}{\to}\ }} \ Y \,.$$

Tenemos

$$\bar{\Phi}_g = \Phi_g \equiv 1$$

y

$$\bar{\Phi}_i = \Phi_i \equiv 0$$

luego

$$\bar{\Phi}_i \circ \bar{\Phi}_g = \Phi_i \circ \Phi_g \equiv 0$$

y sin embargo

$$\bar{\Phi}_{g \circ i} = \Phi_{g \circ i} \equiv 1$$

2.1.23 Utilizando los razonamientos de (2.1.14) puede verse que existen módulos de continuidad tanto s.c.i. como s.c.s. y en particular que el módulo y el módulo regular de continuidad de una función no coinciden en general. Los dos ejemplos que siguen precisan aún más esta cuestión.

2.1.24 Ejemplo. Sea $\Phi \in \mathcal{R}$ (2.1.15). Veamos que existen e.t.i. X e Y y una aplicación $f : X \to Y$ tales que

$$\Phi_f = \bar{\Phi}_f = \Phi \,.$$

Sea $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ el e.t.i. normal construído en el ejemplo (1.4.4).

Consideremos ahora en $\mathbb{R}$ la t.i. $(\mu_\delta)_{\delta\in[0,1]}$ definida por

- μ_0 es la topología discreta;
- si $\delta > 0$, $\mu_\delta = \inf_{\delta'<\delta} \tau_{\Phi(\delta')}$;

como para $\delta_0 > 0$

$$\mu_{\delta_0} = \inf_{\delta'<\delta_0} \tau_{\Phi(\delta')} = \inf_{\delta<\delta_0} \big(\inf_{\delta'<\delta} \tau_{\Phi(\delta')}\big) = \inf_{\delta<\delta_0} \mu_\delta \,,$$

resulta que también $(\mu_\delta)_{\delta\in[0,1]}$ es normal.

Consideremos entonces la aplicación idéntica

$$i : \mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}) \to (\mathbb{R}, (\mu_\delta)_{\delta\in[0,1]})$$

y veamos que

$$\Phi_i = \Phi \,.$$

Sea $\delta > 0$.

Si $\epsilon \le \Phi(\delta)$, entonces

$$\tau_\epsilon \ge \tau_{\Phi(\delta)}$$

y como

$$\Phi(\delta) = \sup_{\delta'<\delta} \Phi(\delta') \,,$$

resulta que

$$\tau_{\Phi(\delta)} = \inf_{\delta'<\delta} \tau_{\Phi(\delta')} = \mu_\delta \,,$$

luego

$$\tau_\epsilon \ge \mu_\delta$$

y i posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\delta)$.

Si $\epsilon > \Phi(\delta)$, entonces

$$\tau_\epsilon < \tau_{\Phi(\delta)} \leq \inf_{\delta'<\delta} \tau_{\Phi(\delta')} = \mu_\delta$$

y i no posee la propiedad $(\epsilon\text{-}\delta)$ luego $\Phi_i(\delta) = \Phi(\delta)$.

2.1.25 Ejemplo. Sea $\Phi \in \mathcal{M}$ (2.1.12) y supongamos que Φ es s.c.s. o, lo que es lo mismo, continua a la derecha o, aún,

$$(\forall\, \delta < 1) \quad \Phi(\delta) = \inf_{\delta'>\delta} \Phi(\delta').$$

Veamos que existen e.t.i. X e Y y una aplicación $f : X \to Y$ tales que

$$\Phi_f = \Phi.$$

En particular, entonces, si Φ no es continua se tiene

$$\bar{\Phi}_f \neq \Phi_f.$$

Sea de nuevo $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\delta)_{\delta\in[0,1]})$ el e.t.i. normal construído en el ejemplo (1.4.4). Consideremos en $\mathbb{R}$ la t.i. $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ definida por

- μ_0 es la topología discreta;
- si $\epsilon > 0$, $\mu_\epsilon = \inf_{\Phi(\delta)<\epsilon} \tau_\delta$.

Si $\epsilon > 0$,

$$\mu_\epsilon = \inf_{\Phi(\delta)<\epsilon} \tau_\delta = \inf_{\epsilon'<\epsilon}(\inf_{\Phi(\delta)<\epsilon'} \tau_\delta) = \inf_{\epsilon'<\epsilon} \mu'_\epsilon,$$

luego $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es también normal.

Consideremos la aplicación idéntica

$$i : (\mathbb{R}, (\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}) \to (\mathbb{R}, (\tau_\delta)_{\delta\in[0,1]})$$

y veamos que

$$\Phi_i = \Phi.$$

Sea $\delta > 0$.

Si $\epsilon \leq \Phi(\delta)$, cuando $\Phi(\delta) = 0$ entonces $\epsilon = 0$ y i posee $(\epsilon\text{-}\delta)$. Cuando $\Phi(\delta) \neq 0$ y $0 < \epsilon \leq \Phi(\delta)$

$$\mu_\epsilon = \inf_{\Phi(\delta')<\epsilon} \tau_{\delta'}$$

pero, si $\Phi(\delta') < \epsilon$, entonces $\delta' < \delta$ y $\tau_{\delta'} \geq \tau_\delta$, luego

$$\mu_\epsilon \geq \tau_\delta$$

y i posee también $(\epsilon\text{-}\delta)$.

Si $\epsilon > \Phi(\delta)$, como

$$\Phi(\delta) = \inf_{\delta' > \delta} \Phi(\delta'),$$

existe δ' tal que

$$\epsilon > \Phi(\delta') > \Phi(\delta)$$

luego

$$\mu_\epsilon \leq \tau_{\delta'} < \tau_\delta$$

y i no posee $(\epsilon\text{-}\delta)$.

Luego

$$\Phi_i(\delta) = \Phi(\delta).$$

2.2 Comparación de topologías imprecisas.

2.2.1 Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X. La posible disparidad entre los conjuntos y las estructuras de Ω y Λ hacen en general imposible la comparación de ambas t.i. mediante la simple comparación de las topologías τ_ω y μ_λ.

Para comparar ambas t.i. recurriremos entonces a las propiedades de continuidad de la aplicación idéntica de X.

2.2.2 DEFINICIÓN. Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Cuando f sea biyectiva y f y f^{-1} sean ϵ-continuas, diremos que f es un ϵ-*isomorfismo*.

Dos e.t.i. entre los que existe un ϵ-isomorfismo diremos que son ϵ-*isomorfos*.

Para $\epsilon = 0$ hablaremos simplemente de *isomorfismo* o de e.t.i. *isomorfos*.

2.2.3 PROPOSICIÓN

La aplicación compuesta de un ϵ-isomorfismo y un ϵ'-isomorfismo es un ϵ''-isomorfismo para

$$\epsilon'' = \max(\epsilon, \epsilon').$$

La aplicación idéntica de un e.t.i. en sí mismo es un isomorfismo. La inversa de un ϵ-isomorfismo es un ϵ-isomorfismo.

El primer aserto es consecuencia de (2.1.20), y los otros dos son evidentes.

2.2.4 Ejemplo. Si (X, τ) y (Y, μ) son dos espacios topológicos ordinarios y $f : X \to Y$ una aplicación, decir que f es un ϵ-isomorfismo equivale, cualquiera que sea $\epsilon < 1$, a decir que f es un homeomorfismo.

2.2.5 DEFINICIÓN. Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X. Pondremos

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

cuando la aplicación idéntica

$$i : (X, (\tau_\omega)) \to (X, (\mu_\lambda))$$

sea ϵ-continua. Cuando

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\leq 0)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

escribiremos simplemente

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \leq (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

y diremos que $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es *menos fina* que $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ o que $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es *más fina* que $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

$(\leq \epsilon)$ y en particular $\leq$ son relaciones de preorden (reflexivas y transitivas) en la clase de las t.i. sobre X. Cuando

$$(\mu_\lambda)\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega) \qquad \text{y} \qquad (\tau_\omega)\,(\leq \epsilon)\,(\mu_\lambda)$$

o sea, cuando la aplicación idéntica sea un ϵ-isomorfismo, pondremos

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\simeq\epsilon)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}\,.$$

Para $\epsilon = 0$, pondremos

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \simeq (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}\,.$$

y diremos que (μ_λ) y (τ_ω) son *equivalentes.*

$(\simeq \epsilon)$ y en particular $\simeq$ son relaciones de equivalencia en la clase de las t.i. sobre X.

2.2.6 TEOREMA

Toda t.i. sobre X es equivalente a la t.i. normal asociada a ella.

Dos t.i. sobre X son equivalentes si y sólo si sus respectivas t.i. normales asociadas coinciden.

Dos t.i. normales sobre X son equivalentes si y sólo si coinciden.

$\leq$ es una relación de orden en el conjunto de las t.i. normales sobre X.

2.2.7 COROLARIO

Dos topologías ordinarias sobre X son equivalentes si y sólo si coinciden.

Resulta de la descripción que hicimos en (1.3.9) de la t.i. normal asociada a una topología ordinaria.

2.2.8 PROPOSICIÓN

Si un e.t.i. $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ es isomorfo a un espacio topológico ordinario (Y, μ), entonces $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es equivalente a una topología ordinaria sobre X.

En efecto, sea

$$f : (X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}) \to (Y, \mu)$$

un isomorfismo y sea $\tilde{\mu}$ la topología ordinaria sobre X trasladada de μ mediante la biyección

$$f^{-1} : (Y, \mu) \to X \,.$$

Entonces

$$f^{-1} : (Y, \mu) \to (X, \tilde{\mu})$$

es un homeomorfismo, o sea (2.2.4) un isomorfismo. Entonces la aplicación idéntica

$$i : (X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}) \to (X, \tilde{\mu}) \,,$$

$i = f^{-1} \circ f$, es un isomorfismo, o sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $\tilde{\mu}$ son equivalentes.

2.2.9 Por cualquiera de las relaciones de preorden $(\leq \epsilon)$ en la clase de las t.i. sobre X, las topologías ordinarias discreta y grosera son respectivamente más fina y menos fina que cualquier otra t.i. sobre X.

Capítulo 3

Traza de una topología imprecisa.

El presente capítulo trata de generalizar la noción clásica de subespacio topológico al caso de un e.t.i.

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada y $A \subset X$. Existen dos opciones posibles a la hora de considerar sobre A una t.i. que provenga de la estructura de e.t.i. de X. La primera es considerar en A la t.i.

$$(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$$

formada por las trazas de las topologías τ_ω, y donde Ω conserva su estructura de conjunto estructurado de índices. La segunda posibilidad es considerar en A la t.i.

$$(\mathring{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$$

formada por las trazas de las topologías $\mathring{\tau}_\epsilon$. Esta t.i. está indiciada por $[0,1]$ y además $\mathring{\tau}_0\ |A$ es la topología discreta. En apariencia, esta segunda opción nos ahorraría la consideración en A de la t.i. normal asociada, siempre que $(\mathring{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$ fuese ya normal. Sin embargo no es así en general (3.1.5 y 3.1.6). Sólo en ocasiones especiales (3.1.11) dicha t.i. es normal.

Cualquiera que sea la traza que consideremos, la inyección canónica

$$A \hookrightarrow X$$

es continua (3.1.7 y 3.1.8).

Hemos decidido considerar sobre un subconjunto A de un e.t.i. $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ la t.i. $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$, que parece en principio más natural y permite abarcar también el otro caso, con sólo tomar el e.t.i. $(X, (\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$. Esta definición soluciona además de forma muy sencilla el problema de la transitividad (3.1.21). En (3.1.22) aclaramos brevemente cómo dicho problema admite aún un cierto arreglo cuando consideramos la otra posibilidad de definición de la traza.

Desde el punto de vista de las topologías iniciales conviene sin embargo tener en cuenta que $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$ es la t.i. menos fina sobre A que hace continua la inyección canónica $A \hookrightarrow X$. En efecto; sea $\epsilon > 0$ y B un ϵ-abierto de A para $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$; entonces $B\ \in\overset{\circ}{\tau}_{\epsilon'}\ |A$ para $\epsilon' \in [0,\epsilon)$. Si $\epsilon' < \epsilon$, resulta que $B = A \cap B'$ con $B' \in\overset{\circ}{\tau}_{\epsilon'}$, o sea B es un ϵ'-abierto de A para toda t.i. haciendo continua $A \hookrightarrow X$. Por fin, B es un ϵ-abierto de A para cualquier t.i. haciendo continua $A \hookrightarrow X$. Advirtamos para terminar esta discusión que las dos definiciones posibles son equivalentes cuando el e.t.i. es accesible, que es el caso más importante (3.1.20).

En el apartado segundo nos ocupamos de los subespacios que poseen, salvo una equivalencia, una topología ordinaria, y de la búsqueda del 'mayor' de tales subespacios.

Por fin, en la última parte, demostramos que la continuidad de una aplicación se conserva con la restricción del dominio y, bajo ciertas hipótesis, con la restricción del espacio imagen.

3.1 Traza de una topología imprecisa.

3.1.1 Si τ es una topología ordinaria sobre X y $A \subset X$, representamos por $\tau|A$ la traza sobre A de τ, esto es la topología sobre A formada por los conjuntos $B \cap A$ cuando B recorre τ.

3.1.2 DEFINICIÓN. Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $A \subset X$. Sobre A consideramos la t.i.

$$(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$$

que llamaremos *t.i. de subespacio* o también la *traza sobre A de la t.i.* $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$. Cuando (τ_ω) es una t.i. accesible, también lo es su traza.

3.1.3 Ejemplo. Si (X,τ) es un espacio topológico ordinario y $A \subset X$, el subespacio A es el espacio topológico ordinario $(A, \tau|A)$.

3.1.4 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $A \subset X$, $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$ la t.i. traza y $(\overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. En general

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A \neq \overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon\ .$$

3.1.5 Ejemplo. Sea $(\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ el e.t.i. normal del ejemplo (1.4.4). Sean

$$A = [-1, 1] \qquad \text{y} \qquad B = (0, 1] \, .$$

Para $0 < \epsilon < 1/2$, $t_\epsilon > 1$ y como

$$B = A \cap (0, t_\epsilon)$$

resulta que $B \in \tau_\epsilon | A$. Entonces, B es un 1/2-abierto de A , o sea $B \in \overset{\circ}{\tau}{}^{A}{}_{1/2}$. Sin embargo, ningún abierto de $\tau_{1/2}$ corta a A en B, luego $B \notin \tau_{1/2} | A$.

3.1.6 En particular, el ejemplo precedente demuestra que la traza de una t.i. normal puede no ser normal.

3.1.7 PROPOSICIÓN

Con las notaciones de (3.1.4) se tiene

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon \, | A \leq \overset{\circ}{\tau}{}^{A}{}_{\epsilon} \, ,$$

es decir, la traza en A de un ϵ-abierto de X es un ϵ-abierto de A.

En efecto, sea B un ϵ-abierto de X ; entonces

$$p(\Omega_B) \geq \epsilon \, .$$

Utilizando, si $D \subset A$,la notación

$$\Omega^A_D = \{\omega \in \Omega \,|\, D \in \tau_\omega | A\} \, ,$$

se tiene

$$\Omega_B \subset \Omega^A_{B\cap A} \, ,$$

luego

$$p(\Omega^A_{B\cap A}) \geq \epsilon$$

y esto significa que $B \cap A$ es un ϵ-abierto de A.

3.1.8 COROLARIO

Sea X un e.t.i., A un subespacio. La inyección canónica

$$A \hookrightarrow X$$

es continua.

3.1.9 Sea X un e.t.i., $A \subset X$. De forma enteramente análoga a la proposición (3.1.7) se demuestra que la traza en A de un ϵ-cerrado de X es un ϵ-cerrado de A.

3.1.10 TEOREMA

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $\epsilon \in [0,1]$, $A \subset X$.

Si A es un ϵ-abierto de X y $B \subset A$ son equivalentes:

(i) B es un ϵ-abierto de A;

(ii) B es un ϵ-abierto de X.

Si A es un ϵ-cerrado de X y $B \subset A$ son equivalentes:

(i) B es un ϵ-cerrado de A;

(ii) B es un ϵ-cerrado de X.

Supongamos que A es un ϵ-abierto.

(ii)$\Rightarrow$(i) es la proposición (3.1.7).

(i)$\Rightarrow$(ii) Si B es un ϵ-abierto de A, entonces

$$p(\Omega_B^A) \geq \epsilon$$

y por otra parte

$$p(\Omega_A) \geq \epsilon\,,$$

pero

$$\Omega_B^A \cap \Omega_A \subset \Omega_B\,,$$

luego

$$p(\Omega_B) \geq p(\Omega_B^A \cap \Omega_A) \geq \epsilon$$

y B es un ϵ-abierto de X.

La segunda parte se demuestra en forma enteramente análoga.

Las consecuencias siguientes son inmediatas.

3.1.11 COROLARIO

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada, A un subespacio de X. Supongamos que A es un abierto o un cerrado de X. Entonces la t.i. normal asociada a la traza $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$ es justamente la traza $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$.

3.1.12 COROLARIO

Sea X un e.t.i. normal, A un abierto o un cerrado de X . Entonces A es también un e.t.i. normal.

3.1.13 COROLARIO

Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X que son equivalentes. Sea A un abierto o cerrado de X (por cualquiera de ambas t.i.). Las trazas sobre A de ambas t.i. son equivalentes.

3.1.14 Ejemplo. Sea (X,τ) un espacio topológico ordinario, $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $A\subset X$. Las trazas sobre A de τ y de $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ son equivalentes.

3.1.15 El corolario (3.1.13) y el ejemplo (3.1.14) presentan dos casos en los que, bajo diferentes restricciones, las trazas de dos t.i. equivalentes son aún equivalentes.

El ejemplo (3.1.17) nos mostrará que esta situación no es sin embargo general. Pero antes, veamos otro resultado.

3.1.16 PROPOSICIÓN

Sea $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una t.i. sobre X, $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $A \subset X$. Entonces

$$(\mathring{\tau}_\epsilon \,|A)_{\epsilon\in[0,1]} \leq (\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}\,.$$

Es decir, de las trazas de t.i. equivalentes, la de una t.i. normal es siempre la menos fina.

Sea $B \subset A$ y pongamos

$$I_B^A = \{\epsilon \in [0,1] \,|\, B \in \mathring{\tau}_\epsilon \,|A\}\,,$$

$$\Omega_B^A = \{\omega \in \Omega \,|\, B \in \tau_\omega|A\}\,.$$

Si B es un ϵ-abierto de A para $(\mathring{\tau}_\epsilon \,|A)_{\epsilon\in[0,1]}$, entonces

$$m(I_B^A) \geq \epsilon\,,$$

en donde m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Supongamos que $\epsilon > 0$; entonces para cada $\epsilon' < \epsilon$

$$[0,\epsilon'] \subset I_B^A$$

luego

$$\epsilon' \in I_B^A$$

o sea

$$B \in \mathring{\tau}_{\epsilon'} \,|A$$

y existe $B' \in \mathring{\tau}_{\epsilon'}$ tal que $B = B' \cap A$. Pero B' es un ϵ'-abierto de X para $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y aplicando (3.1.7), resulta que B es un ϵ'-abierto de A para $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$. Como esto es cierto para cada $\epsilon' < \epsilon$, resulta que B es un ϵ-abierto de A para $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$.

3.1.17 Ejemplo. Sea $\bar{0}$ el primer ordinal, $\bar{\Omega}$ el primer ordinal no numerable, $\bar{\beta} = \bar{\Omega} + 1$.

Pongamos

$$\Omega = [\bar{0}, \bar{\Omega}),$$

es decir, el conjunto de los ordinales numerables. Con su orden habitual Ω verifica **(o1)** y **(o2)** (1.1.6). Sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ formada por los $\Omega' \subset \Omega$ tales que Ω' o $\mathcal{C}\Omega'$ es numerable.

Sea p la probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ dada por

$$p(\Omega') = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega' \text{ es numerable,} \\ 1 & \text{si } \mathcal{C}\Omega' \text{ es numerable;} \end{cases}$$

Ω es así un conjunto estructurado de índices.

Sea

$$X = [\bar{0}, \bar{\beta}].$$

Para cada $\bar{\alpha} \in \Omega$, designamos por $\tau_{\bar{\alpha}}$ la topología sobre X que es la extensión trivial (1.4.4) a X de la topología del orden en $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$. Si $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}'$, entonces $(\bar{\alpha}', \bar{\beta}]$ es un abierto de $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, lo que asegura que

$$\tau_{\bar{\alpha}} \geq \tau_{\bar{\alpha}'}.$$

Entonces

$$(\tau_{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha} \in \Omega}$$

es una t.i. sobre X (una t.i. que no es accesible). Sea $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ la t.i. normal asociada. $\mathring{\tau}_0$ es la topología discreta y, evidentemente,

$$(\forall\, \epsilon > 0) \qquad \mathring{\tau}_\epsilon = \mathring{\tau}_1 \ .$$

Si $B \subset X$, entonces $B \in \mathring{\tau}_1$ si y sólo si

$$\Omega_B = \Omega$$

es decir, $\mathring{\tau}_1$ es el extremo inferior (la intersección) de las topologías $\tau_{\bar{\alpha}}$ cuando $\bar{\alpha} \in \Omega$. O sea, los abiertos de $\mathring{\tau}_1$ son $\emptyset$, X y $\{\bar{\beta}\}$.

Pongamos

$$A = \{\bar{\Omega}, \bar{\beta}\}$$

y consideremos en A las trazas

$$(\tau_{\bar{\alpha}}|A)_{\bar{\alpha}\in\Omega} \qquad \text{y} \qquad (\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}\,.$$

Pongamos

$$B = \{\bar{\Omega}\}\,.$$

Si $\bar{\alpha} \in \Omega$, como

$$B = A \cap (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

resulta que

$$B \in \tau_{\bar{\alpha}}|A$$

luego B es un 1-abierto de A para $(\tau_{\bar{\alpha}}|A)_{\bar{\alpha}\in\Omega}$. Por otra parte, para cada $\epsilon > 0$, $\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A$ es la topología sobre A cuyos abiertos son $\emptyset$, A y $\{\bar{\beta}\}$, luego $B \notin \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A$. O sea, B no es un ϵ-abierto de A con $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$ para ningún $\epsilon > 0$.

Las dos trazas en A

$$(\tau_{\bar{\alpha}}|A)_{\bar{\alpha}\in\Omega} \qquad \text{y} \qquad (\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}$$

no son pues equivalentes.

3.1.18 El ejemplo precedente muestra además que las trazas de t.i. no conservan el orden. En efecto

$$(\tau_{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha}\in\Omega} \leq (\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$$

mientras que

$$(\tau_{\bar{\alpha}}|A)_{\bar{\alpha}\in\Omega} \not\leq (\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\ |A)_{\epsilon\in[0,1]}\,.$$

Para la conservación del orden es necesario añadir una hipótesis de accesibilidad.

3.1.19 PROPOSICIÓN

Sean $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ y $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ dos t.i. sobre X tales que

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

con $\epsilon \in [0,1]$. Supongamos que $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es accesible. Sea $A \subset X$. Entonces

$$(\mu_\lambda|A)_{\lambda\in\Lambda}\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}\,.$$

Sea $\epsilon' > \epsilon$ y sea B un ϵ'-abierto de A para $(\mu_\lambda|A)_{\lambda\in\Lambda}$. Entonces

$$p(\Lambda_B^A) \geq \epsilon'\,.$$

Pongamos

$$\lambda_0 = \sup \Lambda_B^A\,.$$

Si suponemos que $\lambda_0 \in \Lambda_B^A$, entonces

$$\Lambda_B^A = [\bar{0}, \lambda_0]$$

y en particular

$$B \in \mu_{\lambda_0}|A$$

o sea

$$B = B' \cap A$$

con $B' \in \mu_{\lambda_0}$. Pero B' es un ϵ'-abierto de X para $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, luego también para $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$. Basta ahora aplicar la proposición (3.1.7) y resulta que B es un ϵ'-abierto de A para $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$.

Si suponemos que $\lambda_0 \notin \Lambda_B^A$, entonces

$$\Lambda_B^A = [\bar{0}, \lambda_0)\,.$$

Existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_B^A$, $\lambda_n \nearrow$ con $\sup_n \lambda_n = \lambda_0$ y entonces

$$\lim_{n\to\infty} p[\bar{0}, \lambda_n] \geq \epsilon'\,.$$

Para cada ϵ'' con $\epsilon < \epsilon'' < \epsilon'$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$p[\bar{0}, \lambda_n] \geq \epsilon''$$

y como

$$[\bar{0}, \lambda_n] \subset \Lambda_B^A$$

se prueba repitiendo la demostración del caso precedente que B es un ϵ''-abierto de A para $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$. Por fin, como esto es cierto para

$$\epsilon < \epsilon'' < \epsilon'$$

resulta que B es un ϵ'-abierto de A para $(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$.

3.1.20 COROLARIO

Sean $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ y $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ dos t.i. accesibles sobre X tales que

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\simeq\epsilon)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$$

con $\epsilon\in[0,1]$. Sea $A\subset X$. Entonces

$$(\mu_\lambda|A)_{\lambda\in\Lambda}\,(\simeq\epsilon)\,(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}\,.$$

3.1.21 PROPOSICIÓN

Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. y sean

$$B\subset A\subset X\,.$$

La traza en B de la traza en A de $(\tau_\omega)_\Omega$ es la traza en B de $(\tau_\omega)_\Omega$.

3.1.22 Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada, $A\subset X$. Nada esencial ganamos cuando en lugar de considerar $(\tau_\omega|A)_\Omega$, consideramos $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|A)_{[0,1]}$, pues como vimos en (3.1.6), esta última traza puede no ser normal. En cambio, la transitividad en el sentido de (3.1.21) deja de ser cierta cuando para $B\subset A$ tomamos ahora por una parte $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|B)_{[0,1]}$ y por otra $(\overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon\,|B)_{[0,1]}$ en donde hemos representado por $\overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon$ el conjunto de los ϵ-abiertos de A para $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|A)_{[0,1]}$.

Algo de la transitividad se conserva sin embargo, ya que como

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|B=\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|A|B$$

y como por definición $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|A)_{[0,1]}$ y $(\overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon)_{[0,1]}$ son equivalentes, y además son accesibles, resulta que

$$(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,|B)_{[0,1]}\qquad\text{y}\qquad(\overset{\circ}{\tau^A}_\epsilon\,|B)_{[0,1]}$$

son equivalentes (3.1.20).

3.2 Abierto de seguridad.

3.2.1 Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. Vamos a estudiar los subconjuntos A de X tales que la traza de $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sobre A sea equivalente a una topología ordinaria. Una t.i. es equivalente a una topología ordinaria si y sólo si los ϵ-abiertos son los mismos cualquiera que sea $\epsilon > 0$ (véase 1.3.9).

Es evidente que cualquier subconjunto de X que se reduce a un punto es de este tipo. También lo es $\emptyset$. Esto hace que en general no exista un subconjunto de este tipo mayor que todos los otros, pues debería ser necesariamente X. Ahora bien, hemos visto (por ejemplo en 1.4.4) que una t.i. no es en general equivalente a una topología ordinaria.

3.2.2 Supongamos que A es un abierto de X. Si representamos por $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada a $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$, sabemos (3.1.11) que la t.i. normal asociada a $(\tau_\omega|A)_\Omega$ es $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon|A)_{[0,1]}$.

En consecuencia, $(\tau_\omega|A)_\Omega$ es equivalente a una topología ordinaria sobre A si y sólo si

$$(\forall\,\epsilon > 0)\quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon|A = \overset{\circ}{\tau}_1|A\,.$$

Tenemos además la

3.2.3 PROPOSICIÓN

Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos de X tales que para cada i, $(\tau_\omega|A_i)_\Omega$ es equivalente a una topología ordinaria. Entonces $A=\cup A_i$ es un abierto de X tal que $(\tau_\omega|A)_\Omega$ es equivalente a una topología ordinaria.

A es un abierto de X. Para cada $i\in I$

$$(\forall\,\epsilon > 0)\quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon|A_i = \overset{\circ}{\tau}_1|A_i\,.$$

Veamos que

$$(\forall\,\epsilon > 0)\quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon|A = \overset{\circ}{\tau}_1|A\,.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $B \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon |A$; entonces $B \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon$ (3.1.10). Tenemos que

$$B = \cup(B \cap A_i)$$

y

$$(\forall\, i) \quad B \cap A_i \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\,,$$

luego

$$(\forall\, i) \quad B \cap A_i \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon |A_i = \overset{\circ}{\tau}_1 |A_i\,,$$

$$(\forall\, i) \quad B \cap A_i \in \overset{\circ}{\tau}_1\,,$$

y por fin

$$(\forall\, i) \quad B = \cup(B \cap A_i) \in \overset{\circ}{\tau}_1$$

luego

$$B \in \overset{\circ}{\tau}_1 |A\,.$$

3.2.4 DEFINICIÓN. Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. La reunión de todos los abiertos de X cuya t.i. (de subespacio) es equivalente a una topología ordinaria, es el mayor abierto de X cuya t.i. es equivalente a una topología ordinaria. Le daremos el nombre de *abierto de seguridad* de X.

3.2.5 Ejemplo. Si (X, τ) es un espacio topológico ordinario, el abierto de seguridad es X.

3.2.6 Ejemplo. Para el e.t.i. $(X, (\tau_{\bar\alpha})_{\bar\alpha\in\Omega})$ del ejemplo (3.1.17) el abierto de seguridad es X, pues $(\tau_{\bar\alpha})_{\bar\alpha\in\Omega}$ es equivalente a la topología ordinaria

$$\overset{\circ}{\tau}_1 = \{\emptyset, X, \{\bar\beta\}\}\,.$$

3.2.7 Ejemplo. Para el e.t.i. $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ del ejemplo (1.4.4) el abierto de seguridad es $\emptyset$.

Si en dicho ejemplo hacemos para $\epsilon \in (0,1)$

$$t_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\,,$$

obtenemos un e.t.i. análogo $\mathbb{R}_{(-1,1)} = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ y cuyo abierto de seguridad es $(-1,1)$.

3.2.8 LEMA

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., A el abierto de seguridad. Sea $B \subset A$ y supongamos que B es un ϵ-abierto de X para algún $\epsilon > 0$. Entonces B es un abierto de X.

Basta aplicar el teorema (3.1.10).

3.2.9 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., A el abierto de seguridad. Sea $B \subset A$ y supongamos que B es un ϵ-abierto de X para algún $\epsilon > 0$. Entonces la traza de $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sobre B es equivalente a una topología ordinaria.

Por el lema precedsente, B es un abierto de X. Además, como

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |A = \overset{\circ}{\tau}_1\, |A\,,$$

resulta que

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |B = \overset{\circ}{\tau}_1\, |B\,,$$

y esto, utilizando (3.2.2), termina la demostración.

3.2.10 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. accesible, A el abierto de seguridad. Sea $B \subset A$. La traza de $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sobre B es equivalente a una topología ordinaria.

Las trazas

$$(\tau_\omega|B)_\Omega \qquad \text{y} \qquad (\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |B)_{[0,1]}$$

son equivalentes (3.1.20) y

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |A = \overset{\circ}{\tau}_1\, |A\,,$$

por ser A el abierto de seguridad. Luego también

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |B = \overset{\circ}{\tau}_1\, |B$$

y entonces si D es un ϵ-abierto de B para $(\tau_\omega|B)_\Omega$, lo es para $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |B)_{[0,1]}$, y si $\epsilon > 0$ esto significa que para $\epsilon' < \epsilon$, $D \in \overset{\circ}{\tau}_{\epsilon'}\, |B$, luego $D \in \overset{\circ}{\tau}_1\, |B$, luego D es un abierto de B para $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon\, |B)_{[0,1]}$ y para $(\tau_\omega|B)_\Omega$. Esto demuestra que $(\tau_\omega|B)_\Omega$ es equivalente a una topología ordinaria.

3.3 Subespacios y continuidad.

3.3.1 PROPOSICIÓN

Sean X, Y dos e.t.i. $f : X \to Y$ una aplicación, sean $\epsilon, \delta \in [0,1]$. Supongamos que f posee la propiedad (ϵ-δ).

Si $A \subset X$, entonces $f|_A$ posee (ϵ-δ).

Si $B \subset Y$, con $f(X) \subset B$ y B es δ-abierto o δ-cerrado, entonces $f : X \to B$ posee (ϵ-δ).

Como la inyección canónica $i : A \hookrightarrow X$ es continua y $f|_A = f \circ i$, aplicando el lema (2.1.18) demostramos la primera parte. Para la segunda, basta utilizar el teorema (3.1.10).

3.3.2 PROPOSICIÓN

Sean X, Y dos e.t.i. $\Phi \in \mathcal{M}$, $f : X \to Y$ una aplicación Φ-continua.

Si $A \subset X$, entonces $f|_A$ es Φ-continua.

Si B es un abierto o un cerrado de Y con $f(X) \subset B$, entonces $f : X \to B$ es Φ-continua.

Como $i : A \hookrightarrow X$ es continua y $f|_A = f \circ i$, basta aplicar el corolario (2.1.20) para probar la primera parte. Para la segunda, se aplica la proposición precedente a la propiedad ($\Phi(\delta)$-δ) para cada $\delta \in [0,1]$.

3.3.3 Si X e Y son dos e.t.i. y $f : X \to Y$ es un isomorfismo y si $A \subset X$, no es cierto en general que la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} f : A &\to f(A) \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

sea un isomorfismo. Es justamente lo que muestra el ejemplo (3.1.17) para la aplicación idéntica

$$i : (X, (\tau_{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha} \in \Omega}) \to (X, (\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]})$$

y

$$A = \{\bar{\Omega}, \bar{\beta}\}.$$

3.3.4 PROPOSICIÓN

Sean X, Y son dos e.t.i., $\epsilon \in [0,1]$ y $f : X \to Y$ un ϵ-isomorfismo. Sea A un abierto o un cerrado de X. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} f : A &\to f(A) \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

es un ϵ-isomorfismo.

Para $\epsilon = 1$ es trivial; supongamos $\epsilon < 1$. En primer lugar, $f(A)$ es un abierto o un cerrado de Y. Aplicando (3.3.2) resulta que

$$f : A \to f(A)$$

es ϵ-continua. Basta por fin hacer el mismo razonamiento con f^{-1} en lugar de f y $f(A)$ en lugar de A.

3.3.5 COROLARIO

Sean X, Y son dos e.t.i. y $f : X \to Y$ un isomorfismo. Si A es el abierto de seguridad de X entonces $f(A)$ es el abierto de seguridad de Y.

Capítulo 4

Filtros.

La idea de filtro que introducimos en (4.1.2) es la inmediata generalización de la noción debida a H. CARTAN. Para comprender el sentido de dicha idea conviene tomar como propiedades que definen un filtro las **(f1)**, **(f2)**, **(f4)** y **(f5)** (4.1.2 y 4.1.4) e interpretar $\mathcal{F}(A) = \epsilon$ como significando que 'A pertenece en cierta medida ϵ al filtro $\mathcal{F}$'. Cuando para un filtro ordinario consideramos como en (4.1.10) la función característica asociada, podemos interpretarlo como un filtro para el que la pertenencia es cuestión de 'todo o nada'.

Las propiedades de los filtros ordinarios son utilizadas en la demostración de (4.2.4) y en otras de capítulos posteriores. El resultado (4.2.7) por el que los maximales del conjunto de los filtros sobre X son exactamente los ultrafiltros clásicos, nos permitirá más adelante simplificar varias demostraciones usando propiedades bien conocidas de éstos.

Adelantamos el sentido en que vamos a utilizar los filtros en el ejemplo (4.1.3), en el que definimos el filtro de los entornos de un punto para una t.i. En el capítulo siguiente dedicaremos un apartado (el 5.1) a precisar esta cuestión.

En (4.1.12) probamos que existen filtros diferentes de los clásicos.

El comportamiento de nuestra noción de filtro respecto de la imagen y la imagen recíproca por una aplicación (4.3.2 y 4.3.6) nos permite prescindir totalmente de la idea de base de filtro. Hacemos sin embargo en los párrafos (4.4.8) y siguientes una incursión en el tema de las bases de filtro para mostrar lo limitado de su alcance (4.4.12 y 4.4.13).

El orden en los filtros se estudia en el primer apartado, pero la relación que más interesa es la que denotamos con $(\leq \Phi)$ (4.5.2) a pesar de la pérdida de propiedades que acarrea (4.5.7). Utilizando las mismas palabras que en la introducción al capítulo 2, podemos decir que $(\leq \epsilon)$ (4.5.3) es una relación 'suficiente cuando nos conformamos con un nivel de seguridad ϵ'.

De las relaciones $(\leq \epsilon)$, la más fuerte se da para $\epsilon = 0$, que es justamente la relación $\leq$.

4.1 La noción de filtro.

4.1.1 Sea X un conjunto no vacío. Un filtro sobre X (en el sentido de Cartan) diremos que es un c-*filtro*.

4.1.2 DEFINICIÓN. Sea X un conjunto no vacío. Un *filtro* sobre X es una aplicación

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$

verificando

(f1) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;

(f2) $\mathcal{F}(X) = 1$;

(f3) $\mathcal{F}(A \cap B) = \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$.

4.1.3 Ejemplo. Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i.; sea $x \in X$. Para cada $A \subset X$ ponemos

$$\mathcal{E}_x(A) = \sup\{\epsilon > 0 \mid A \text{ es un } \epsilon\text{-entorno de } x\}$$

cuando el conjunto de tales ϵ es no vacío y

$$\mathcal{E}_x(A) = 0$$

en caso contrario. $\mathcal{E}_x$ así definido es un filtro. Diremos que es el *filtro de los entornos de x* por la t.i. $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$.

4.1.4 Si $\mathcal{F}$ es una aplicación de $\mathcal{P}(X)$ en $[0,1]$, la propiedad **(f3)** equivale al conjunto de las dos siguientes:

(f4) $A \subset B \quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}(A) \leq \mathcal{F}(B)$;

(f5) $\mathcal{F}(A \cap B) \geq \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$.

La demostración de tal equivalencia es inmediata.

4.1.5 PROPOSICIÓN

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Si $A, B \subset X$ entonces

$$\mathcal{F}(A) > 0 \text{ y } \mathcal{F}(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset\,.$$

En particular, si $A \subset X$, se tiene $\mathcal{F}(A) = 0$ o $\mathcal{F}(\mathcal{C}A) = 0$.

4.1.6 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Utilizaremos con mucha frecuencia las dos notaciones que siguen.

Para $0 < \epsilon \leq 1$ ponemos

$$\mathcal{F}_\epsilon = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, \mathcal{F}(A) \geq \epsilon\}$$

y para $0 \leq \epsilon < 1$ ponemos

$$\mathcal{F}_{\epsilon^+} = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, \mathcal{F}(A) > \epsilon\}\,.$$

Tanto $\mathcal{F}_\epsilon$ como $\mathcal{F}_{\epsilon^+}$ son c-filtros.

4.1.7 Son inmediatas las proposiciones siguientes

$$0 < \epsilon' \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\epsilon'} \geq \mathcal{F}_\epsilon\,;$$

$$\epsilon' \leq \epsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\epsilon'^+} \geq \mathcal{F}_{\epsilon^+}\,;$$

$$0 < \epsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{\epsilon^+} \leq \mathcal{F}_\epsilon\,;$$

$$\epsilon' < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_\epsilon \leq \mathcal{F}_{\epsilon'^+}\,;$$

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{F}_\epsilon = \bigcap_{0<\epsilon'<\epsilon} \mathcal{F}_{\epsilon'} = \bigcap_{0<\epsilon'<\epsilon} \mathcal{F}_{\epsilon'^+}\,;$$

$$(\forall\, \epsilon < 1) \quad \mathcal{F}_{\epsilon^+} = \bigcup_{\epsilon<\epsilon'<1} \mathcal{F}_{\epsilon'} = \bigcup_{\epsilon<\epsilon'<1} \mathcal{F}_{\epsilon'^+}\,.$$

4.1.8 Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X y $A \subset X$ se tiene

$$\mathcal{F}(A) = \sup\{\epsilon > 0 \,|\, A \in \mathcal{F}_\epsilon\} = \sup\{\epsilon < 1 \,|\, A \in \mathcal{F}_{\epsilon^+}\}$$

si tales conjuntos son no vacíos y

$$\mathcal{F}(A) = 0$$

en caso contrario.

4.1.9 Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos filtros sobre X. Pondremos

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$$

para representar la relación de orden habitual entre dos funciones con llegada en $[0,1]$, o sea,

$$(\forall\, A \in \mathcal{P}(X)) \quad \mathcal{G}(A) \leq \mathcal{F}(A)\,.$$

Son entonces equivalentes

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \mathcal{G} \leq \mathcal{F}\,; \\ &\text{(ii) } (\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{G}_\epsilon \leq \mathcal{F}_\epsilon\,; \\ &\text{(iii) } (\forall\, \epsilon < 1) \quad \mathcal{G}_{\epsilon^+} \leq \mathcal{F}_{\epsilon^+}\,. \end{aligned}$$

4.1.10 Ejemplo. Sea $\tilde{\mathcal{F}}$ un c-filtro sobre X; designemos por $\mathcal{F}$ la función característica en $\mathcal{P}(X)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$, o sea

$$\mathcal{F}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A \in \tilde{\mathcal{F}}\,, \\ 0 & \text{si} \quad A \notin \tilde{\mathcal{F}}\,; \end{cases}$$

entonces $\mathcal{F}$ es un filtro y $(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{F}_\epsilon = \tilde{\mathcal{F}}$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es un filtro tomando únicamente los valores 0 y 1, $\mathcal{F}$ es la función característica del c-filtro $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_\epsilon$, cualquiera que sea $\epsilon > 0$.

La aplicación que envía cada c-filtro en su función característica es pues una inyección del conjunto de los c-filtros en X sobre los filtros de X con valores 0 y 1. Cuando hablemos de un c-filtro nos referiremos tanto al c-filtro como a su función característica.

Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ son c-filtros sobre X, la expresión

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$$

significa lo mismo en el sentido tradicional que en el de (4.1.9).

4.1.11 Ejemplo. Sea $x \in X$. El filtro definido por

$$\mathcal{U}_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A\,, \end{cases}$$

es un c-filtro.

4.1.12 Ejemplo. El ejemplo (4.1.3) nos permite construir sin dificultad filtros que no sean c-filtros. Así, en el e.t.i. del ejemplo (1.4.4), si $\mathcal{E}_1$ es el filtro de los entornos de 1, se tiene

$$\mathcal{E}_1([0,2]) = 1/2\,.$$

4.1.13 Si (X,τ) es un espacio topológico ordinario y $x \in X$, el filtro $\mathcal{E}_x$ de los entornos de x en el sentido de (4.1.3) es el c-filtro de los entornos de x por τ.

4.1.14 Sea $X \neq \emptyset$. Sea $(\mathcal{U}_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$ una familia de c-filtros sobre X verificando

$$0 < \epsilon' \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_{\epsilon'} \geq \mathcal{U}_\epsilon\,.$$

Definimos entonces un filtro $\mathcal{F}$ sobre X poniendo

$$\mathcal{F}(A) = \sup\{\epsilon > 0 \mid A \in \mathcal{U}_\epsilon\}$$

cuando el conjunto de tales ϵ es no vacío y

$$\mathcal{F}(A) = 0$$

en caso contrario. Diremos que $\mathcal{F}$ es el *filtro engendrado* por la familia monótona de c-filtros $(\mathcal{U}_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$.

Se tiene

$$(\forall\, 0 < \epsilon < 1) \quad \mathcal{F}_{\epsilon^+} \leq \mathcal{U}_\epsilon \leq \mathcal{F}_\epsilon$$

y además, después de lo que hemos visto en (4.1.8), $\mathcal{F}$ es el único filtro verificando tales desigualdades.

4.1.15 Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, $\mathcal{F}$ es justamente el filtro engendrado por la familia monótona de c-filtros $(\mathcal{F}_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$.

4.1.16 Ejemplo. Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $x \in X$. Para cada $\epsilon > 0$, sea $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los ϵ-entornos de x, esto es, de los entornos de x por $\mathring{\tau}_\epsilon$. La familia monótona de c-filtros $(\mathcal{V}_{x,\epsilon})_{\epsilon\in(0,1]}$ engendra justamente el filtro $\mathcal{E}_x$ de los entornos de x (4.1.3).

Para el e.t.i. $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ del ejemplo (1.4.4), para $x = 1$ y $V = [0, 2]$ se tiene

$$V \notin \mathcal{V}_{x,1/2} \qquad \text{y} \qquad V \in \mathcal{E}_{x,1/2}\,.$$

Para el e.t.i. $(\mathbb{R}, \{\tau_0, \tau_1\})$ del ejemplo (1.3.7) si $x \in \mathbb{R}$ y $V = \{x\}$ se tiene

$$V \in \mathcal{V}_{x,1/2} \qquad \text{y} \qquad V \notin \mathcal{E}_{x,1/2^+}\,.$$

4.1.17 Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por la familia monótona de c-filtros $(\mathcal{U}_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$. En el ejemplo precedente hemos visto que las desigualdades

$$(\forall\, 0 < \epsilon < 1) \quad \mathcal{F}_{\epsilon^+} \leq \mathcal{U}_\epsilon \leq \mathcal{F}_\epsilon$$

son en general estrictas. Para que se verifiquen las igualdades

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{U}_\epsilon = \mathcal{F}_\epsilon$$

es condición necesaria y suficiente que $(\mathcal{U}_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1]}$ sea continua a la izquierda, o sea que

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{U}_\epsilon = \bigcap_{0<\epsilon'<\epsilon} \mathcal{U}_{\epsilon'}\,.$$

4.1.18 Sea X un conjunto no vacío, $F(X)$ el conjunto de los filtros sobre X. Estudiaremos la relación de orden (4.1.9) en $F(X)$.

Existe un mínimo, que es el c-filtro $\mathcal{F} = \{X\}$.

No existe un máximo en cuanto X posee al menos dos puntos. En efecto, si $x, y \in X$, $x \neq y$, consideremos los c-filtros $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ (4.1.11). No existe ningún filtro $\mathcal{G}$ tal que

$$\mathcal{U}_x \leq \mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{U}_y \leq \mathcal{G}$$

pues entonces

$$\mathcal{G}(\{x\}) = \mathcal{G}(\{y\}) = 1$$

y

$$\mathcal{G}(\emptyset) = \mathcal{G}(\{x\} \cap \{y\}) = 1\,,$$

lo que es absurdo.

4.1.19 TEOREMA

El orden en $F(X)$ es inductivo

Sea $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$ un conjunto totalmente ordenado de filtros sobre X. Para cada $A \subset X$ pongamos

$$\mathcal{F}(A) = \sup_{i\in I} \mathcal{F}^{(i)}(A)\,.$$

$\mathcal{F}$ es un filtro. En efecto: **(f1)** y **(f2)** se cumplen de forma evidente. También es inmediato **(f4)**.

Probemos **(f5)**; razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que existen A y B tales que

$$\mathcal{F}(A\cap B) < \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))\,,$$

o sea

$$\mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}(A) = \sup \mathcal{F}^{(i)}(A) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}(B) = \sup \mathcal{F}^{(i)}(B)\,.$$

Existen entonces $j, k \in I$ tales que

$$\mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}^{(j)}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}^{(k)}(B)\,.$$

Pero $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$ es totalmente ordenado; si por ejemplo $\mathcal{F}^{(k)} \leq \mathcal{F}^{(j)}$, se tiene entonces

$$\mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}^{(j)}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A\cap B) < \mathcal{F}^{(j)}(B)\,,$$

o sea

$$\mathcal{F}(A\cap B) < \min(\mathcal{F}^{(j)}(A), \mathcal{F}^{(j)}(B)) = \mathcal{F}^{(j)}(A\cap B)$$

lo que va en contra de la definición de $\mathcal{F}$. Por fin, $\mathcal{F}$ es una cota superior de $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$.

4.1.20 PROPOSICIÓN

Sea $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$ una familia de filtros sobre X. Para cada $A \subset X$ ponemos

$$\mathcal{F}(A) = \inf_{i\in I} \mathcal{F}^{(i)}(A)\,.$$

$\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, que es el extremo inferior de la familia $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$.

$\mathcal{F}$ verifica **(f1)**, **(f2)** y **(f4)** de forma inmediata. Por otra parte, si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se tiene para cada $i \in I$

$$\mathcal{F}^{(i)}(A \cap B) \geq \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

luego

$$\mathcal{F}(A \cap B) \geq \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))\,,$$

lo que prueba **(f5)**. Y es evidente que $\mathcal{F}$ es el extremo inferior de $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$.

4.2 Ultrafiltros.

4.2.1 DEFINICIÓN. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es un *ultrafiltro* si es un maximal del conjunto $F(X)$ de los filtros sobre X.

4.2.2 Ejemplo. Un c-filtro sobre X que es un ultrafiltro en el sentido ordinario es un ultrafiltro en el presente sentido, como se demuestra fácilmente aplicando (4.1.5).

4.2.3 Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{U}\,.$$

Es una consecuencia de (4.1.19) y del axioma de ZORN.

4.2.4 PROPOSICIÓN

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X ; sea $A \subset X$. Son equivalentes

(i) Existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}(A) = 1$;
(ii) Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}(A) = 1$;
(iii) Existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}(A) > 0$;
(iv) $\mathcal{F}(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad B \cap A \neq \emptyset$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) y (ii) $\Rightarrow$ (iii) son evidentes.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $\mathcal{F}(B) > 0$, entonces $\mathcal{G}(B) > 0$, y como $\mathcal{G}(A) > 0$ resulta que

$$\mathcal{G}(A \cap B) > 0$$

luego $A \cap B \neq \emptyset$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Consideremos el subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ formado por A y por los subconjuntos B de X tales que $\mathcal{F}(B) > 0$. Cualquier intersección finita de conjuntos de $\mathcal{B}$ es no vacía, luego existe un c-filtro $\mathcal{G}$ con valor 1 en cada conjunto de $\mathcal{B}$. De forma evidente

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}(A) = 1\,.$$

4.2.5 COROLARIO

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y sea $A \subset X$ tal que $\mathcal{F}(A) > 0$. Existe entonces un filtro $\mathcal{G}$ tal que

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}(A) = 1\,.$$

4.2.6 COROLARIO

La imagen de $\mathcal{P}(X)$ por un ultrafiltro es el conjunto $\{0, 1\}$.

4.2.7 COROLARIO

Los ultrafiltros sobre X son justamente los ultrafiltros ordinarios.

4.2.8 Una aplicación

$$\mathcal{U} : \cap P(X) \to [0,1]$$

es un ultrafiltro si y sólo si es un filtro y verifica

(u1) $(\forall A \in \mathcal{P}(X)) \quad \mathcal{U}(A) = 1$ o $\mathcal{U}(\mathcal{C}A) = 1$.

En efecto, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, es un filtro y verifica trivialmente **(u1)**, puesto que es un ultrafiltro ordinario. Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ un filtro verificando **(u1)**; entonces aplicando (4.1.5) resulta que $\mathcal{U}$ es un c-filtro, y por verificar **(u1)** es un ultrafiltro.

4.2.9 Ejemplo. Si $x \in X$, el filtro $\mathcal{U}_x$ definido en (4.1.11) es un ultrafiltro.

4.2.10 Una aplicación

$$\mathcal{U} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$

es un ultrafiltro si y sólo si es un morfismo reticular, o sea cuando

(f1) $\mathcal{U}(\emptyset) = 0$;

(f2) $\mathcal{U}(X) = 1$;

(f3) $\mathcal{U}(A \cap B) = \min(\mathcal{U}(A), \mathcal{U}(B))$;

(r1) $\mathcal{U}(A \cup B) = \max(\mathcal{U}(A), \mathcal{U}(B))$,

pues **(f2)** y **(r1)** implican **(u1)** y por otra parte, un ultrafiltro verifica **(r1)**.

En particular esto significa que todo morfismo reticular entre $\mathcal{P}(X)$ y $[0,1]$ tiene por imagen $\{0,1\}$, lo que por otra parte es consecuencia de que 0 y 1 son los únicos elementos del retículo $[0,1]$ que admiten un elemento ortogonal.

4.2.11 De forma contraria a lo que ocurre con los c-filtros, un filtro no es en general el extremo inferior de los ultrafiltros más finos que él.

En efecto, si $(\mathcal{U}^{(i)})_{i\in I}$ es una familia de ultrafiltros y

$$\mathcal{F} = \inf \mathcal{U}^{(i)}$$

entonces $\mathcal{F}$ es siempre un c-filtro, y hemos visto que existen filtros que no son c-filtros (4.1.12).

4.2.12 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. El extremo inferior de los ultrafiltros más finos que $\mathcal{F}$ es un c-filtro que designaremos por

$$c(\mathcal{F})\,.$$

Este c-filtro $c(\mathcal{F})$ es el menor de los c-filtros más finos que $\mathcal{F}$. Se tiene

$$c(\mathcal{F})(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \mathcal{F}(A) > 0\,, \\ 0 & \text{si } \ \mathcal{F}(A) = 0\,. \end{cases}$$

Si $\mathcal{F}$ es un c-filtro, entonces $c(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

4.3 Imagen e imagen recíproca de un filtro por una aplicación.

4.3.1 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y

$$f\ : X \to Y$$

una aplicación. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f^{-1}\ : \mathcal{P}(Y) &\to \mathcal{P}(X) \\ B &\to f^{-1}(B) \end{aligned}$$

y la aplicación compuesta

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \circ f^{-1}\,,$$

o sea, para cada $B \subset Y$

$$\mathcal{G}(B) = \mathcal{F}(f^{-1}(B))\,.$$

$\mathcal{G}$ es un filtro sobre Y. En efecto

$$\mathcal{G}(\emptyset) = \mathcal{F}(f^{-1}(\emptyset)) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0\,,$$

$$\mathcal{G}(Y) = \mathcal{F}(f^{-1}(Y)) = \mathcal{F}(X) = 1\,,$$

y por fin

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(A \cap B) &= \mathcal{F}(f^{-1}(A \cap B)) = \mathcal{F}(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \\ &= \min(\mathcal{F}(f^{-1}(A)), \mathcal{F}(f^{-1}(B))) = \min(\mathcal{G}(A), \mathcal{G}(B))\,.\end{aligned}$$

4.3.2 DEFINICIÓN. El filtro así definido diremos que es la *imagen por f del filtro $\mathcal{F}$* y lo representaremos por $f\mathcal{F}$. Se tiene pues

$$f\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(f^{-1}(B))\,.$$

4.3.3 Si $\mathcal{F}$ es un c-filtro, también lo es $f\mathcal{F}$. Como además son equivalentes

(i) $f\mathcal{F}(B) = 1\,;$
(ii) $(\exists\, A \subset X) \quad \mathcal{F}(A) = 1$ y $f(A) \subset B$

resulta que entonces $f\mathcal{F}$ es la imagen de $\mathcal{F}$ por f en el sentido tradicional.

4.3.4 Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y

$$f\,:X \to Y$$

una aplicación. Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre Y. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f\,:\mathcal{P}(X) &\to \mathcal{P}(Y) \\ A &\to f(A)\end{aligned}$$

y la aplicación compuesta

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} \circ f\,,$$

o sea, para cada $A \subset X$

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{G}(f(A))\,.$$

$\mathcal{F}$ no es en general un filtro, incluso cuando $f(X) = Y$. En efecto, si $Y = \{y\}$, $\mathcal{G}$ es el único filtro posible sobre Y y f la única aplicación posible de X en Y, se tiene

$$A \subset X\,, A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(A) = 1\,,$$

luego $\mathcal{F}$ no es un filtro si X posee al menos dos puntos.

4.3.5 Definimos entonces para cada $A \subset X$

$$\mathcal{F}(A) = \sup_{f^{-1}(B) \subset A} \mathcal{G}(B)\,.$$

$\mathcal{F}$ puede no ser tampoco un filtro, pues $\mathcal{F}(\emptyset) \neq 0$ en general. Sin embargo, si añadimos la hipótesis

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}f(X)) = 0\,,$$

entonces $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. En efecto

$$f^{-1}(B) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B \subset \mathcal{C}f(X) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}(B) = 0\,,$$

luego

$$\mathcal{F}(\emptyset) = 0\,.$$

Además $\mathcal{F}(X) \geq \mathcal{G}(Y) = 1$. También es inmediata **(f4)**. Veamos pues que $\mathcal{F}$ verifica **(f5)** o sea

$$\mathcal{F}(A \cap B) \geq \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))\,.$$

Razonemos por reducción al absurdo; si

$$\mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{F}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{F}(B)\,,$$

existen $D, E \subset Y$ tales que

$$f^{-1}(D) \subset A \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(E) \subset B$$

y que

$$\mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{G}(D) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{G}(E)\,,$$

luego

$$\mathcal{F}(A \cap B) < \min(\mathcal{G}(D), \mathcal{G}(E)) = \mathcal{G}(D \cap E)\,,$$

lo que es absurdo, pues

$$f^{-1}(D \cap E) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E) \subset A \cap B\,.$$

4.3.6 DEFINICIÓN. Cuando

$$\mathcal{G}(\mathcal{C}f(X)) = 0\,,$$

el filtro sobre X definido en el párrafo precedente diremos que es la *imagen recíproca por f del filtro $\mathcal{G}$* y lo representamos por $f^{-1}\mathcal{G}$. Se tiene pues

$$f^{-1}\mathcal{G}(A) = \sup_{f^{-1}(B)\subset A} \mathcal{G}(B)\,.$$

4.3.7 Si $A \subset X$ y ponemos

$$D = \bigcup \{B \mid B \subset Y \text{ y } f^{-1}(B) \subset A\}$$

se tiene

$$f^{-1}(D) \subset A$$

y como $\mathcal{G}$ verifica **(f4)** resulta

$$f^{-1}\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(D)\,.$$

4.3.8 Si $\mathcal{G}$ es un c-filtro sobre Y, se tiene la equivalencia de

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \mathcal{G}(\mathcal{C}f(X)) = 0\,;\\ &\text{(ii) } \mathcal{G}(B) = 1 \quad \Rightarrow \quad B \cap f(X) \neq \emptyset\,; \end{aligned}$$

en efecto, si (i) es cierto y $B \cap f(X) = \emptyset$ entonces $B \in \mathcal{C}f(X)$ luego $\mathcal{G}(B) = 0$. Recíprocamente, si (ii) es cierto, como $f(X) \cap \mathcal{C}f(X) = \emptyset$, resulta que $\mathcal{G}(\mathcal{C}f(X)) \neq 1$, luego $\mathcal{G}(\mathcal{C}f(X)) = 0$.

Es decir, la imagen recíproca de un c-filtro existe o no al mismo tiempo en el sentido tradicional y en el de (4.3.6).

Además, si existe, $f^{-1}\mathcal{G}$ es entonces la imagen recíproca de $\mathcal{G}$ por f según la definición tradicional, pues se tiene la equivalencia de

$$\begin{aligned} &\text{(i) } f^{-1}\mathcal{G}(A) = 1\,;\\ &\text{(ii) } (\exists\, B \subset Y) \quad \mathcal{G}(B) = 1 \text{ y } f^{-1}(B) \subset A\,. \end{aligned}$$

4.3.9 Tanto la imagen como la imagen recíproca conservan el orden entre los filtros.

4.3.10 Sea

$$f : X \to Y$$

una aplicación. Resulta del caso clásico y de (4.2.7) que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, lo es también $f\mathcal{U}$, pero que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre Y no lo es en general $f^{-1}\mathcal{U}$ cuando $f^{-1}\mathcal{U}$ existe.

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre Y, la condición $\mathcal{U}(\mathcal{C}f(X)) = 0$ equivale a $\mathcal{U}(f(X)) = 1$. Si esta condición se cumple y f es inyectiva, $f^{-1}\mathcal{U}$ es también un ultrafiltro.

4.3.11 PROPOSICIÓN

Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\mathcal{G}$ un filtro sobre Y.

a) Si $f^{-1}\mathcal{G}$ existe, se tiene

$$f\, f^{-1}\mathcal{G} \geq \mathcal{G}\,.$$

b) $f^{-1}f\mathcal{F}$ existe siempre y

$$f^{-1}f\mathcal{F} \leq \mathcal{F}\,.$$

---

a) Si $B \subset Y$

$$f\, f^{-1}\mathcal{G}(B) = f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(B)) \geq \mathcal{G}(B)\,.$$

b) Como

$$f\mathcal{F}(\mathcal{C}f(X)) = \mathcal{F}(f^{-1}(\mathcal{C}f(X))) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$$

siempre existe $f^{-1}f\mathcal{F}$. Además si $A \subset X$ y suponemos que

$$f^{-1}f\mathcal{F}(A) > \mathcal{F}(A)\,,$$

existe $B \subset Y$ con $f^{-1}(B) \subset A$ y tal que

$$f\mathcal{F}(B) > \mathcal{F}(A)\,,$$

o sea $\mathcal{F}(f^{-1}(B)) > \mathcal{F}(A)$, lo que es absurdo.

4.4 Extensión de un filtro. Traza de un filtro. Generador de un filtro.

4.4.1 Sea A un subconjunto no vacío de X, $i : A \hookrightarrow X$ la inyección canónica. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre A. La imagen

$$\bar{\mathcal{F}} = i\,\mathcal{F}$$

de $\mathcal{F}$ por i es el filtro sobre X que viena dado para $B \subset X$ por

$$\bar{\mathcal{F}}(B) = \mathcal{F}(A \cap B)\,.$$

Diremos que $\bar{\mathcal{F}}$ es la *extensión de* $\mathcal{F}$ a X. En particular

$$\bar{\mathcal{F}}(A) = 1\,.$$

La extensión de un c-filtro sobre A es un c-filtro sobre X que coincide con la extensión en el sentido ordinario (4.3.3). La extensión de un ultrafiltro es un ultrafiltro (4.3.10).

4.4.2 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. La imagen recíproca

$$\mathcal{F}_A = i^{-1}\,\mathcal{F}$$

existe cuando

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}A) = 0$$

y es, en ese caso, el filtro sobre A dado para cada $B \subset A$ por

$$\mathcal{F}_A(B) = \sup_{D \cap A \subset B} \mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(B \cup \mathcal{C}A)\,.$$

Diremos que $\mathcal{F}_A$ es la *traza de* $\mathcal{F}$ en A.

La traza de un c-filtro sobre X es, cuando existe, un c-filtro sobre A, que coincide con la traza en el sentido ordinario (4.3.8). Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, $\mathcal{U}_A$ existe si y sólo si $\mathcal{U}(A) = 1$ y en ese caso es también un ultrafiltro (4.3.10). Su valor en un conjunto $B \subset A$ viene entonces dado por

$$\mathcal{U}_A(B) = \mathcal{U}(B)$$

a causa de la propiedad **(r1)** de (4.2.10).

4.4.3 Sea A un subconjunto no vacío de X. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X y $\mathcal{F}_A$ existe, se tiene aplicando (4.3.11)

$$\overline{(\mathcal{F}_A)} \geq \mathcal{F}\,.$$

Sin embargo, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X y $\mathcal{U}_A$ existe

$$\overline{(\mathcal{U}_A)} = \mathcal{U}\,.$$

4.4.4 Ejemplo. Si $X = \{x, y\}$, $\mathcal{F}$ es el filtro mínimo sobre X y $A = \{x\}$ se tiene

$$\mathcal{F}(A) = 0 \qquad \text{y} \qquad \overline{(\mathcal{F}_A)}(A) = 1\,.$$

4.4.5 PROPOSICIÓN

Sea A un subconjunto no vacío de X, sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre A. Entonces $\bar{\mathcal{F}}|_A$ existe siempre y

$$\bar{\mathcal{F}}|_A = \mathcal{F}\,.$$

De (4.3.11) se deduce que $\bar{\mathcal{F}}|_A$ existe. Además, si $B \subset A$

$$\bar{\mathcal{F}}|_A(B) = \bar{\mathcal{F}}(B \cup \mathcal{C}A) = \mathcal{F}(A \cap (B \cup \mathcal{C}(A)) = \mathcal{F}(B)\,.$$

4.4.6 Sea A un subconjunto no vacío de X. La proposición precedente significa que la aplicación

$$\begin{aligned} F(A) &\to F(X) \\ \mathcal{F} &\to \bar{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

es inyectiva, y la aplicación

$$\begin{aligned} F(A) &\to F(X) \\ \mathcal{F} &\to \mathcal{F}_A\,, \end{aligned}$$

definida únicamente para los filtros cuya traza en A existe, es sobre.

O sea, que filtros diferentes sobre A poseen extensiones diferentes, y por otra parte, que todo filtro sobre A es la traza de un filtro sobre X.

4.4.7 Si A es un subconjunto no vacío de X y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre A, podemos considerar también $\mathcal{F}$ como una aplicación del subconjunto $\mathcal{P}(A)$ de $\mathcal{P}(X)$ en $[0,1]$. En (4.4.1) extendemos esta aplicación a una aplicación
$$\bar{\mathcal{F}} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$
que es un filtro sobre X.

Esta situación se generaliza de la manera siguiente:

4.4.8 DEFINICIÓN. Sea X un conjunto no vacío; sea $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ y
$$f : \beta \to [0,1]$$
verificando

(g1) $\emptyset \in \beta$ y $f(\emptyset) = 0$;
(g2) $\sup_{B\in\beta} f(B) = 1$;
(g3) $A, B \in \beta \Rightarrow (\exists\, D \in \beta)\ D \subset A \cap B$ y $f(D) \geq \min(f(A), f(B))$.

Diremos entonces que f es un *generador de filtro* sobre X.

4.4.9 Si $f : \beta \to [0,1]$ es un generador de filtro sobre X, la aplicación
$$\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$
dada por
$$\mathcal{F}(A) = \sup_{B\in\beta\,,B\subset A} f(B)$$
es un filtro sobre X, que representaremos por $\langle f \rangle$.

En efecto, $\mathcal{F}$ verifica de forma inmediata **(f1)**, **(f2)** y **(f4)**. Por otra parte si
$$\mathcal{F}(A \cap B) < \min(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)),$$
o sea si
$$\mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{F}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A \cap B) < \mathcal{F}(B),$$
existen $D, E \in \beta$, $D \subset A$, $E \subset B$ tales que
$$\mathcal{F}(A \cap B) < f(D) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A \cap B) < f(E).$$
Sea entonces $G \in \beta$ con
$$G \subset D \cap E \qquad \text{y} \qquad f(G) \geq \min(f(D), f(E)).$$

Resulta que

$$G \subset A \cap B \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}(A \cap B) < f(G)$$

lo que contradice la definición de $\mathcal{F}$. Luego $\mathcal{F}$ verifica **(f5)**.

4.4.10 Ejemplo. Si $A \subset X$ y $\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ es un filtro sobre A, $\mathcal{F}$ es un generador de filtro sobre X y

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \bar{\mathcal{F}}\,.$$

4.4.11 Ejemplo. Si β es una base ordinaria de filtro sobre X y definimos

$$f : \beta \cup \{\emptyset\} \to [0,1]$$

por

$$f(B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad B \in \beta\,, \\ 0 & \text{si} \quad B = \emptyset \end{cases}$$

entonces f es un generador de filtro sobre X y $\langle f \rangle$ es el c-filtro engendrado en el sentido ordinario por β.

4.4.12 Sean

$$f : \beta \to [0,1]\,, \qquad g : \gamma \to [0,1]$$

dos generadores de filtro sobre X. Si se cumple que

$$(\forall\, B \in \beta)(\exists G \in \gamma) \quad G \subset B \quad \text{y} \quad f(B) \leq g(G)\,,$$

entonces

$$\langle f \rangle \leq \langle g \rangle\,,$$

pero la proposición recíproca no es cierta.

4.4.13 Ejemplo. Sea β la familia de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ formada por $\emptyset$ y por los intervalos

$$V_n = \left[-\frac{1}{n}\,, \frac{1}{n}\right]\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Definimos

$$f : \beta \to [0,1] \qquad \text{y} \qquad g : \beta \to [0,1]$$

por

$$\begin{array}{lll} f(\emptyset) = 0 & \text{y} & f(V_n) = \dfrac{n-1}{n}\,; \\ g(\emptyset) = 0 & \text{y} & g(V_n) = 1\,. \end{array}$$

Tanto $\langle f \rangle$ como $\langle g \rangle$ es el c-filtro de los entornos de 0 por la topología usual, pero cualquiera que sea V_n, ningún conjunto B de β verifica

$$g(V_n) \leq f(B)\,.$$

4.4.14 PROPOSICIÓN

> Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X y $f : \beta \to [0,1]$ un generador de filtro sobre X. Son entonces equivalentes
>
> $$\begin{array}{l} \text{(i) } \langle f \rangle \leq \mathcal{G}\,; \\ \text{(ii) } (\forall\, B \in \beta) \quad f(B) \leq \mathcal{G}(B)\,. \end{array}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) pues si $B \in \beta$, $f(B) \leq \langle f \rangle(B) \leq \mathcal{G}(B)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) pues, para cada $A \subset X$

$$\langle f \rangle(A) = \sup_{B \in \beta, B \subset A} f(B) \leq \sup_{B \in \beta, B \subset A} \mathcal{G}(B) \leq \mathcal{G}(A)\,.$$

4.5 La relación $\mathcal{G}\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}$.

4.5.1 Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X; sea $\Phi \in \mathcal{M}$ (2.1.12). La aplicación

$$\begin{array}{rl} \Phi \circ \mathcal{F} : \mathcal{P}(X) & \to [0,1] \\ A & \to \Phi(\mathcal{F}(A)) \end{array}$$

verifica **(f1)** y **(f3)**. Entonces $\Phi \circ \mathcal{F}$ es un filtro si y sólo si $\Phi(1) = 1$. Así, para $\epsilon < 1$, $i_\epsilon \circ \mathcal{F}$ es un filtro.

4.5.2 Sean $\mathcal{F},\mathcal{G}$ dos filtros sobre X y $\Phi\in\mathcal{M}$. Pondremos

$$\mathcal{G}\,(\leq\Phi)\,\mathcal{F}$$

para representar

$$\Phi\circ\mathcal{G}\leq\mathcal{F}\,.$$

Son equivalentes

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \mathcal{G}\,(\leq\Phi)\,\mathcal{F}\,;\\
&\text{(ii) } (\forall\,\delta>0)\quad \mathcal{G}_\delta\leq\mathcal{F}_{\Phi(\delta)}\,.
\end{aligned}$$

4.5.3 Cuando $\mathcal{G}\,(\leq i_\epsilon)\,\mathcal{F}$, pondremos

$$\mathcal{G}\,(\leq\epsilon)\,\mathcal{F}\,.$$

En particular, para $\epsilon=0$, se trata de la relación de orden $\mathcal{G}\leq\mathcal{F}$ de (4.1.9). Son equivalentes

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } \mathcal{G}\,(\leq\epsilon)\,\mathcal{F}\,;\\
&\text{(ii) } \epsilon<\delta\leq 1\quad\Rightarrow\quad \mathcal{G}_\delta\leq\mathcal{F}_\delta\,;\\
&\text{(iii) } \epsilon\leq\delta<1\quad\Rightarrow\quad \mathcal{G}_{\delta+}\leq\mathcal{F}_{\delta+}\,.
\end{aligned}$$

4.5.4 Si $\Phi,\Phi'\in\mathcal{M}$ y $\Phi'\leq\Phi$ se tiene evidentemente

$$\mathcal{G}\,(\leq\Phi)\,\mathcal{F}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{G}\,(\leq\Phi')\,\mathcal{F}\,.$$

En particular si $\epsilon<\epsilon'$

$$\mathcal{G}\,(\leq\epsilon)\,\mathcal{F}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{G}\,(\leq\epsilon')\,\mathcal{F}\,.$$

4.5.5 Si $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$ son tres filtros sobre X, $\Phi,\Phi'\in\mathcal{M}$ y

$$\mathcal{G}\,(\leq\Phi)\,\mathcal{F}\qquad\text{y}\qquad\mathcal{H}\,(\leq\Phi')\,\mathcal{G}\,,$$

entonces

$$\mathcal{H}\,(\leq\Phi\circ\Phi')\,\mathcal{F}\,.$$

Si $\epsilon''=\max(\epsilon,\epsilon')$ y

$$\mathcal{G}\,(\leq\epsilon)\,\mathcal{F}\qquad\text{y}\qquad\mathcal{H}\,(\leq\epsilon')\,\mathcal{G}\,,$$

resulta

$$\mathcal{H}\,(\leq\epsilon'')\,\mathcal{F}\,.$$

4.5.6 PROPOSICIÓN

Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son filtros sobre X y $\mathcal{F}$ es un c-filtro, son equivalentes para cada $\epsilon < 1$

$$\text{(i) } \mathcal{G}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}\,;$$
$$\text{(ii) } \mathcal{G}_{\epsilon^+} \leq \mathcal{F}\,.$$

En particular. si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X se tiene, cualquiera que sea $\epsilon < 1$

$$\mathcal{F}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}_{\epsilon^+}\,.$$

4.5.7 Si $\Phi \in \mathcal{M}$, la relación en $F(X)$

$$\mathcal{G}\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}$$

no es ni siquiera reflexiva en general. Sin embargo para $\epsilon \in [0,1]$ la relación

$$\mathcal{G}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}$$

es una relación de preorden (reflexiva y transitiva) en $F(X)$.

Los ultrafiltros son aún maximales por esta relación en el sentido siguiente: si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $\epsilon < 1$

$$\mathcal{U}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\,(\leq \epsilon)\mathcal{U}\,.$$

4.5.8 PROPOSICIÓN

Sean X, Y conjuntos no vacíos, $f : X \to Y$ una aplicación y $\Phi \in \mathcal{M}$.

a) Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son filtros sobre X tales que

$$\mathcal{G}\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}\,,$$

entonces

$$f\mathcal{G}\,(\leq \Phi)\,f\mathcal{F}\,.$$

b) Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son filtros sobre Y tales que

$$\mathcal{G}\,(\le \Phi)\,\mathcal{F}\,,$$

y existen las imágenes recíprocas $f^{-1}\mathcal{G}$ y $f^{-1}\mathcal{F}$, entonces

$$f^{-1}\mathcal{G}\,(\le \Phi)\,f^{-1}\mathcal{F}\,.$$

---

a) Si $B \subset Y$

$$\Phi \circ f\mathcal{G}(B) = \Phi \circ \mathcal{G}(f^{-1}(B)) \le \mathcal{F}(f^{-1}(B)) = f\mathcal{F}(B)\,.$$

b) Si $A \subset X$ y ponemos

$$D = \bigcup \{B \mid B \subset Y \text{ y } f^{-1}(B) \subset A\}\,,$$

tenemos (4.3.7)

$$\Phi \circ f^{-1}\mathcal{G}(A) = \Phi \circ \mathcal{G}(D) \le \mathcal{F}(D) = f^{-1}\mathcal{F}(A)\,.$$

Capítulo 5

Convergencia.

La convergencia de un filtro hacia un punto se define, como en el caso tradicional, mediante su comparación con el filtro de los entornos de un punto; este filtro juega pues un papel esencial. Dedicamos a su estudio el apartado 5.1.

Un problema al que dedicamos particular atención en este primer apartado es el de la relación entre la traza del filtro de los entornos de un punto sobre un subespacio que lo contiene y el filtro de los entornos del punto en el subespacio. En general ambos filtros son diferentes (5.1.8). Sin embargo, para una t.i. accesible (que es la situación más interesante) ambos coinciden (5.1.9). Además, coinciden también cuando el subespacio en cuestión es un abierto, un cerrado o un 'buen entorno' del punto (5.1.10 y 5.1.11).

La posible definición de límite con relación a un subespacio presenta entonces equívocos (5.2.22) excepto en las situaciones que acabamos de citar.

También abordamos la continuidad local. El aplazamiento de esta cuestión hasta el presente capítulo se explica en (5.3.1). Definimos en el caso local instrumentos análogos al caso general para el estudio de la continuidad.

En (5.3.8) generalizamos el resultado clásico que relaciona la continuidad local de una función con la convergencia de filtros.

Sin embargo la equivalencia de continuidad global y local no es cierta en el caso general (5.3.9), aunque es aún válida en el caso más importante (5.3.12). Observamos así de nuevo una distorsión análoga a la que ya vimos para los ϵ-entornos (1.4.5).

Un módulo de continuidad local $\Phi_{f,a}$ verifica necesariament $\Phi_{f,a}(0) = 0$ (5.3.3). Para la relación entre continuidad global y local resulta por tanto necesario no hablar de funciones Φ-continuas más que para funciones Φ con

$\Phi(0) = 0$. Se explica así la exigencia, arbitraria en apariencia, que hicimos al definir el módulo de continuidad (global) de una función (2.1.20)

5.1 El filtro de los entornos de un punto.

5.1.1 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $x \in X$. Para cada $\epsilon > 0$ consideramos el c-filtro

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon}$$

de los entornos de x por $\overset{\circ}{\tau}_\epsilon$ (4.1.16). Designamos por

$$\mathcal{E}_x$$

el filtro de los entornos de x, esto es el filtro engendrado por la familia monótona $(\mathcal{V}_{x,\epsilon})_{\epsilon\in[0,1]}$, o sea

$$\mathcal{E}_x(V) = \sup\{\epsilon > 0 \,|\, V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}\}$$

con $\mathcal{E}_x(V) = 0$ cuando el conjunto es vacío.

5.1.2 Para $0 < \epsilon < 1$

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{E}_{x,\epsilon}$$

con desigualdades que son, por lo general, estrictas. Si $\epsilon' < \epsilon$

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{E}_{x,\epsilon^+}$$

y de (4.1.7) se deduce inmediatamente

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{E}_{x,\epsilon} = \bigcap_{0<\epsilon'<\epsilon} \mathcal{V}_{x,\epsilon'}\,,$$

$$(\forall\, \epsilon < 1) \quad \mathcal{E}_{x,\epsilon^+} = \bigcup_{\epsilon<\epsilon'<1} \mathcal{V}_{x,\epsilon'}\,.$$

5.1.3 Si dos t.i. son equivalente, coinciden los filtros respectivos de entornos de cada punto. El recíproco es cierto como veremos en (7.2.2).

5.1.4 Sea $x \in X$, $V \subset X$ y pongamos como en (1.4.3)

$$\Omega_{V,x} = \{\omega \in \Omega \,|\, V \text{ es un entorno de } x \text{ por } \tau_\omega\}\,.$$

Con esta notación teníamos

$$V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon} \quad \Rightarrow \quad p(\Omega_{V,x}) \geq \epsilon$$

pero no la implicación recíproca, incluso cuando Ω era accesible.

También se tiene

$$V \in \mathcal{E}_{x,\epsilon} \quad \Rightarrow \quad p(\Omega_{V,x}) \geq \epsilon$$

ya que

$$\begin{aligned} V \in \mathcal{E}_{x,\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad (\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon'} \\ &\Rightarrow \quad (\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad p(\Omega_{V,x}) \geq \epsilon' \\ &\Rightarrow \quad p(\Omega_{V,x}) \geq \epsilon\,, \end{aligned}$$

pero la recíproca tampoco es cierta.

5.1.5 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $(X, (\tau_{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha}\in\Omega}$ de (3.1.17) y sea $x = \bar{\Omega}$ y $V = [\bar{1}, \bar{\beta}]$. Por una parte

$$\Omega_{V,x} = \Omega\,,$$

luego

$$p(\Omega_{V,x}) = 1\,.$$

Por otra, si $\epsilon > 0$

$$V \notin \mathcal{V}_{x,\epsilon}\,,$$

luego

$$\mathcal{E}_x(V) = 0\,.$$

5.1.6 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. accesible, $x \in X$, $V \subset X$. Entonces

$$\mathcal{E}_x(V) = p(\Omega_{V,x})\,.$$

Ya hemos visto en (5.1.4) que

$$\mathcal{E}_x(V) \le p(\Omega_{V,x}) .$$

Para probar la desigualdad recíproca, supongamos

$$p(\Omega_{V,x}) \ge \epsilon > 0$$

y sea $\omega_0 = \sup \Omega_{V,x}$.

Si $\omega_0 \in \Omega_{V,x}$, entonces

$$\Omega_{V,x} = [\bar{0}, \omega_0] .$$

Además V es entorno de x por τ_{ω_0} , o sea existe $A \in \tau_{\omega_0}$ tal que

$$x \in A \subset V ,$$

pero

$$[\bar{0}, \omega_0] \subset \Omega_A$$

y

$$p(\Omega_A) \ge p\,[\bar{0}, \omega_0] \ge \epsilon ,$$

luego

$$A \in \overset{\circ}{\tau}_\epsilon$$

y entonces

$$V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}$$

y

$$\mathcal{E}_x(V) \ge \epsilon .$$

Si $\omega_0 \notin \Omega_{V,x}$, entonces

$$\Omega_{V,x} = [\bar{0}, \omega_0) .$$

Existe $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_{V,x}$, $\omega_n \nearrow$ y $\sup \omega_n = \omega_0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} p\,[\bar{0}, \omega_n] \ge \epsilon .$$

Para $\epsilon' < \epsilon$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$p\,[\bar{0}, \omega_n] \ge \epsilon'$$

y como $\omega_n \in \Omega_{V,x}$ se prueba repitiendo la demostración anterior que

$$\mathcal{E}_x(V) \ge \epsilon' .$$

Como esto es así para cada $\epsilon' < \epsilon$, resulta por fin

$$\mathcal{E}_x(V) \ge \epsilon ,$$

lo que termina la demostración.

5.1.7 Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $A \subset X$ y $x \in A$. Sea $\mathcal{E}_x$ el filtro de los entornos de x en X. Como $\mathcal{E}_x(\mathcal{C}A) = 0$, existe la traza $\mathcal{E}_x|_A$ de dicho filtro sobre A.

Por otra parte, podemos considerar en A la t.i. de subespacio. El filtro sobre A de los entornos de X en A, lo designaremos por $\mathcal{E}_x^A$.

La relación entre ambos filtros es

$$\mathcal{E}_x|_A \leq \mathcal{E}_x^A .$$

En efecto, además de la notación $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ de (5.1.1), llamemos $\mathcal{V}_{x,\epsilon}^A$ al c-filtro de los ϵ-entornos de x en A. De la proposición (3.1.7) se deduce que

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} \cap A \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon}^A ,$$

luego para cada $V \subset A$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x|_A(V) &= \mathcal{E}_x(V \cup \mathcal{C}A) \\ &= \sup\{\epsilon > 0 \,|\, V \cup \mathcal{C}A \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}\} \\ &= \sup\{\epsilon > 0 \,|\, V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon} \cap A\} \\ &\leq \sup\{\epsilon > 0 \,|\, V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}^A\} \\ &= \mathcal{E}_x^A(V) . \end{aligned}$$

Pero en general

$$\mathcal{E}_x|_A \neq \mathcal{E}_x^A .$$

5.1.8 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $(X, (\tau_{\bar\alpha})_{\bar\alpha\in\Omega}$ de (3.1.17) y sea $x = \bar\Omega$ y $A = \{\bar\Omega, \bar\beta\}$. Para $V = \{\bar\Omega\}$ se tiene

$$\mathcal{E}_x(V \cup \mathcal{C}A) = \mathcal{E}_x([\bar 0, \bar\Omega]) = 0 ,$$

luego

$$\mathcal{E}_x|_A(V) = 0 ,$$

y sin embargo V es un 1-abierto de A, luego

$$\mathcal{E}_x^A(V) = 1 .$$

5.1.9 PROPOSICIÓN

Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i. accesible, $A \subset X$ y $x \in A$. Entonces
$$\mathcal{E}_x|_A = \mathcal{E}_x^A \,.$$

Hemos visto en (5.1.6) que si $V \subset A$

$$\mathcal{E}_x|_A(V) = \mathcal{E}_x(V \cup \mathcal{C}A) = p(\Omega_{V\cup\mathcal{C}A,x}) \,,$$

$$\mathcal{E}_x^A(V) = p(\Omega^A_{V,x}) \,,$$

con

$$\Omega_{V\cup\mathcal{C}A,x} = \{\omega \in \Omega \,|\, V \cup \mathcal{C}A \text{ es un entorno de } x \text{ por } \tau_\omega\} \,,$$

$$\Omega^A_{V,x} = \{\omega \in \Omega \,|\, V \text{ es un entorno de } x \text{ por } \tau_\omega|A\} \,,$$

y como
$$\Omega_{V\cup\mathcal{C}A,x} = \Omega^A_{V,x} \,,$$
se obtiene la conclusión.

5.1.10 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $A \subset X$ y $x \in A$. Si A es un abierto o un cerrado de X, entonces

$$\mathcal{E}_x|_A = \mathcal{E}_x^A \,.$$

El razonamiento es el mismo de (5.1.7) pero ahora, aplicando (3.1.11) se tiene
$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} \cap A = \mathcal{V}^A_{x,\epsilon}$$
y por lo tanto la igualdad.

5.1.11 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $A \subset X$ y $x \in A$. Si $\mathcal{E}_x(A) = 1$, entonces

$$\mathcal{E}_x|_A = \mathcal{E}_x^A .$$

Supongamos que

$$\mathcal{E}_x^A(V) = \epsilon > 0$$

y sea $0 < \epsilon' < \epsilon$. Por una parte

$$V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon'}^A ,$$

luego existe D, ϵ'-abierto de A, tal que

$$x \in D \subset V .$$

Por otra

$$A \in \mathcal{V}_{x,\epsilon'} ,$$

luego existe B, ϵ'-abierto de X, tal que

$$x \in B \subset A .$$

Entonces

$$x \in B \cap D \subset V .$$

Ahora bien, $B \cap D$ es un ϵ'-abierto de B (3.1.7) luego un ϵ'-abierto de X (3.1.10) y entonces

$$V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon'} ,$$

luego

$$\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon'$$

y

$$\mathcal{E}_x|_A(V) \geq \epsilon' .$$

Por fin, como esto es cierto para $0 < \epsilon' < \epsilon$, resulta

$$\mathcal{E}_x|_A(V) \geq \epsilon$$

lo que demuestra que

$$\mathcal{E}_x^A \leq \mathcal{E}_x|_A .$$

Basta completar la demostración con la desigualdad de (5.1.7).

5.2 Convergencia de filtros.

5.2.1 DEFINICIÓN. Sea X un e.t.i., $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $x \in X$. Sea $\Phi \in \mathcal{M}$. Diremos que $\mathcal{F}$ Φ-*converge hacia* x cuando

$$\mathcal{E}_x \,(\leq \Phi)\, \mathcal{F}$$

y pondremos entonces

$$x = \Phi\text{-}\lim \mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x\,,$$

diciendo también que x es un Φ-*límite* de $\mathcal{F}$.

Las mismas expresiones y notaciones se utilizarán sustituyendo Φ por ϵ cuando $\Phi = i_\epsilon$ o también suprimiendo Φ cuando $\Phi = i_0$, o sea cuando Φ sea la función identidad de $[0,1]$ en sí mismo.

5.2.2 Si X es un espacio topológico ordinario y $\mathcal{F}$ un c-filtro sobre X, la expresión

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x$$

posee el mismo sentido cualquiera que sea $\epsilon < 1$ y se trata justamente de la convergencia en el sentido ordinario.

5.2.3 Ejemplo. Sea X un e.t.i., $x \in X$.

$\mathcal{E}_x$ converge hacia x.

El ultrafiltro trivial alrededor de x, $\mathcal{U}_x$ (4.1.11), verifica

$$\mathcal{U}_x \xrightarrow{\Phi} x$$

cualquiera que sea $\Phi \in \mathcal{M}$.

5.2.4 Si $\mathcal{F}$ es un c-filtro y

$$\mathcal{F} \to x\,,$$

entonces, cualquiera que sea $\Phi \in \mathcal{M}$,

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x\,.$$

5.2.5 Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{M}$ y $\Phi' \leq \Phi$, se tiene

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi'} x\,.$$

En particular, si $\epsilon \leq \epsilon'$,

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon'} x\,.$$

5.2.6 Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\Phi'} x \text{ y } \mathcal{G}\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\Phi\circ\Phi'} x$$

y en particular

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} x \text{ y } \mathcal{G}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x\,.$$

5.2.7 Sea X un e.t.i., $\mathcal{F} \in F(X)$, $x \in X$ y $\Phi \in \mathcal{M}$ tales que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x\,.$$

Entonces, para cada ϵ-entorno V de x,

$$\mathcal{F}(V) \geq \Phi(\epsilon)\,.$$

Además tenemos

5.2.8 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $\mathcal{F} \in F(X)$, $x \in X$ y $\Phi \in \mathcal{R}$ (2.1.15). Son equivalentes

(i) $\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x$;

(ii) Para cada ϵ-entorno V de x, $\mathcal{F}(V) \geq \Phi(\epsilon)$.

Acabamos de ver que (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que $\mathcal{E}_x(V) = \epsilon > 0$; para cada $\epsilon' < \epsilon$, V es un ϵ'-entorno de x, luego $\mathcal{F}(V) \geq \Phi(\epsilon')$. Entonces

$$\mathcal{F}(V) \geq \sup_{\epsilon' < \epsilon} \Phi(\epsilon') = \Phi(\epsilon)\,,$$

lo que demuestra que $\mathcal{E}_x\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}$.

5.2.9 COROLARIO

Sea X un e.t.i., $\mathcal{F} \in F(X)$, $x \in X$. Son equivalentes

(i) $\mathcal{F} \to x$;

(ii) Para cada ϵ-entorno V de x, $\mathcal{F}(V) \geq \epsilon$.

5.2.10 Si $(\mathcal{F}^{(i)})_{i\in I}$ es una familia de filtros Φ-convergentes hacia x, entonces $\inf \mathcal{F}^{(i)}$ Φ-converge hacia x, ya que si $V \subset X$, como para cada $i \in I$

$$\Phi \circ \mathcal{E}_x(V) \leq \mathcal{F}^{(i)}(V),$$

entonces

$$\Phi \circ \mathcal{E}_x(V) \leq \inf \mathcal{F}^{(i)}(V) = [\inf \mathcal{F}^{(i)}](V).$$

5.2.11 Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro mayor que $\mathcal{F}$, se deduce de (5.2.6) que $\mathcal{U} \xrightarrow{\Phi} x$.

Sin embargo es posible que cada ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$ sea Φ-convergente hacia x sin que lo sea $\mathcal{F}$. En este caso $c(\mathcal{F})$ (4.2.12) es Φ-convergente hacia x.

5.2.12 **Ejemplo.** Sea $\mathbb{R}_0$ el e.t.i. del ejemplo (1.4.4) y $\mathcal{E}_1$ el filtro de los entornos de 1 en $\mathbb{R}_0$. En el espacio topológico ordinario $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathcal{E}_1$ no converge hacia 1, pues, por ejemplo

$$\mathcal{E}_1([0,2]) = \frac{1}{2}.$$

Sin embargo $c(\mathcal{E}_1)$, que no es sino el c-filtro de los entornos de 1 para la topología usual de $\mathbb{R}$, es convergente hacia 1. Lo mismo ocurre entonces con cada ultrafiltro más fino que $\mathcal{E}_1$.

5.2.13 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $A \subset X$, $x \in A$. Sea $\mathcal{F} \in F(A)$ y $\Phi \in \mathcal{M}$ tales que en el subespacio A

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x\,.$$

Entonces se tiene

$$\bar{\mathcal{F}} \xrightarrow{\Phi} x$$

en X, donde $\bar{\mathcal{F}}$ es la prolongación de $\mathcal{F}$ a X.

En efecto, por hipótesis

$$\mathcal{E}_x^A\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}\,,$$

luego (5.1.7)

$$\mathcal{E}_x|_A\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}\,,$$

y por (4.5.8)

$$\overline{\mathcal{E}_x|_A}\,(\leq \Phi)\,\bar{\mathcal{F}}\,,$$

y como (4.4.3)

$$\mathcal{E}_x \leq \overline{\mathcal{E}_x|_A}$$

resulta

$$\mathcal{E}_x\,(\leq \Phi)\,\bar{\mathcal{F}}\,,$$

o sea

$$\bar{\mathcal{F}} \xrightarrow{\Phi} x\,.$$

5.2.14 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i. accesible, $A \subset X$, $x \in A$. Sea $\mathcal{F} \in F(X)$ y $\Phi \in \mathcal{M}$ tales que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} x\,.$$

Entonces

$$\mathcal{F}_A \xrightarrow{\Phi} x$$

en A cuando la traza $\mathcal{F}_A$ existe.

Como

$$\mathcal{E}_x\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}\,,$$

entonces (4.5.8)

$$\mathcal{E}_x|_A\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}_A\,,$$

y como X es accesible, resulta de (5.1.9)

$$\mathcal{E}_x^A\,(\leq \Phi)\,\mathcal{F}_A\,.$$

5.2.15 La precedente proposición es cierta aún sin suponer que X es accesible cuando A es abierto o cerrado o cuando $\mathcal{E}_x(A) = 1$, pues entonces se tiene también $\mathcal{E}_x^A = \mathcal{E}_x|_A$ (5.1.10 y 5.1.11). Sin embargo, cuando X no es accesible, la proposición es falsa en general.

5.2.16 Ejemplo. Con los mismos datos del ejemplo (5.1.8) se tiene

$$\mathcal{E}_x \to x\,,$$

pero $\mathcal{E}_x|_A \not\to x$.

5.2.17 DEFINICIÓN. Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Sea $\mathcal{F} \in F(X)$, $\Phi \in \mathcal{M}$, $b \in Y$. Pondremos

$$\Phi\text{-}\lim_{\mathcal{F}} f(x) = b$$

para representar

$$f\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} b\,.$$

Cuando $a \in X$ y $\mathcal{F} = \mathcal{E}_a$ pondremos

$$\Phi\text{-}\lim_{x \to a} f(x) = b$$

y diremos que f *Φ-converge hacia b cuando x tiende hacia a*. Utilizaremos las simplificaciones usuales de notación cuando $\Phi = i_\epsilon$ y en particular cuando $\Phi = i_0$.

5.2.18 Cuando X e Y son espacios topológicos ordinarios, la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

tiene justamente el sentido ordinario.

5.2.19 Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$, $b \in Y$. Si $\Phi \in \mathcal{M}$ son equivalentes

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \Phi\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b\,; \\ &\text{(ii) } \mathcal{E}_b(V) \geq \epsilon \;\Rightarrow\; \mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) \geq \Phi(\epsilon)\,, \end{aligned}$$

y si además $\Phi \in \mathcal{R}$ puede añadirse

(iii) Para cada ϵ-entorno V de b, $\mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) \geq \Phi(\epsilon)$.

Si $\epsilon \in [0,1]$ son entonces equivalentes

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \epsilon\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b\,; \\ &\text{(ii) } \mathcal{E}_b(V) \geq \epsilon' > \epsilon \;\Rightarrow\; \mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) \geq \epsilon'\,; \\ &\text{(iii) Si } V \text{ es un } \epsilon'\text{-entorno de } b \text{ con } \epsilon' > \epsilon\,,\ \mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) \geq \epsilon'\,. \end{aligned}$$

5.2.20 PROPOSICIÓN

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$, $b \in Y$. Son equivalentes

$$\begin{aligned} &\text{(i) } \epsilon\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b\,; \\ &\text{(ii) } \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} a \;\Rightarrow\; f\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} b\,. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por hipótesis

$$\mathcal{E}_b\,(\leq \epsilon)\, f\mathcal{E}_a\,.$$

Luego si $\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} a$, entonces $\mathcal{E}_a\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}$ y utilizando (4.5.8)

$$f\mathcal{E}_a\,(\leq \epsilon)\, f\mathcal{F}\,,$$

luego

$$\mathcal{E}_b\,(\leq \epsilon)\, f\mathcal{F}\,,$$

o sea

$$f\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} b\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) es inmediato.

5.2.21 De (5.2.5) se deduce que para $\Phi' \leq \Phi$

$$\Phi\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Rightarrow \quad \Phi'\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b$$

y para $\epsilon \leq \epsilon'$

$$\epsilon\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Rightarrow \quad \epsilon'\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

5.2.22 Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $\Phi \in \mathcal{M}$. Sea $A \subset X$, $a \in X$ tal que $\mathcal{E}_a|_A$ existe y $b \in Y$. Podemos utilizar la notación

$$\Phi\text{-}\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = b$$

para representar que

$$\Phi\text{-}\lim_{\mathcal{E}_a|_A} f(x) = b\,,$$

en donde ahora $f : A \to Y$ es la restricción de f a A. Pero si $a \in A$, en cuyo caso $\mathcal{E}_a|_A$ existe, este hecho no equivale a

$$\Phi\text{-}\lim_{\mathcal{E}_a^A} f(x) = b\,.$$

Cuando $a \in A$, la notación es equívoca salvo cuando estamos en uno de los casos siguientes

- X es accesible (5.1.9),
- A es abierto o cerrado (5.1.10),
- $\mathcal{E}_a(A) = 1$ (5.1.11),

y no conviene utilizarla salvo en estos casos.

5.3 Continuidad local.

5.3.1 La noción de continuidad local hubiera podido introducirse utilizando los ϵ-entornos de un punto (1.4.1). Se presenta sin embargo la anomalía siguiente: sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$; es posible que para cada δ-entorno V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ sea un ϵ'-entorno de a cualquiera que sea $\epsilon' < \epsilon$, pero que sin embargo $f^{-1}(V)$ no sea un ϵ-entorno de a. Es decir, el resultado de (2.1.10) que expresa una cierta continuidad a la izquierda, desaparece para esta noción de continuidad local.

El instrumento que permite subsanar el hecho anómalo que comentamos es justamente el conceptp de filtro de los entornos de un punto.

5.3.2 Ejemplo. Sea $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]})$ el e.t.i. de (1.4.4) y consideremos por otre parte $\mathbb{R}$ con su topología usual. Sea i la aplicación identidad

$$i : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}\,.$$

Si V es un entorno de 0 en $\mathbb{R}$, entonces V es un ϵ-entorno de 0 en $\mathbb{R}_0$ cualquiera que sea $\epsilon < 1$, pero no es un 1-entorno de 0 en $\mathbb{R}_0$ salvo en el caso $V = \mathbb{R}$.

5.3.3 Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$. Si $\epsilon, \delta \in [0,1]$ consideraremos la *propiedad* $(a,\epsilon\text{-}\delta)$

$$(a,\epsilon\text{-}\delta) \quad \mathcal{E}_{f(a)}(V) \geq \delta \quad \Rightarrow \quad f\mathcal{E}_a(V) \geq \epsilon\,,$$

o lo que es lo mismo cuando $\epsilon > 0$, $\delta > 0$

$$(a,\epsilon\text{-}\delta) \quad \mathcal{E}_{f(a),\delta} \leq (f\mathcal{E}_a)_\epsilon\,.$$

Si f posee $(a,\epsilon\text{-}\delta)$ y $\epsilon' \leq \epsilon$ y $\delta' \geq \delta$, entonces f posee $(a,\epsilon'\text{-}\delta')$.

f posee siempre la propiedad $(a,0\text{-}\delta')$ cualquiera que sea $\delta \in [0,1]$.

Para $\delta \in [0,1]$ ponemos

$$\Phi_{f,a}(\delta) = \sup\,\{\epsilon \mid f \text{ posee } (a,\epsilon\text{-}\delta)\}\,.$$

En particular, necesariamente

$$\Phi_{f,a}(0) = 0\,.$$

La función $\Phi_{f,a}$ así definida recibe el nombre de *módulo de continuidad local de f en a*.

De forma análoga a (2.1.11) se tiene:

5.3.4 PROPOSICIÓN

Sean X, Y dos e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$, $\Phi_{f,a}$ el módulo de continuidad local de f en a.

a) Cualquiera que sea $\delta \in [0,1]$, f posee $(a,\Phi_{f,a}(\delta)\text{-}\delta)$.

b) Sea $\delta \in [0,1]$. f posee $(a,\epsilon\text{-}\delta)$ si y sólo si $\epsilon \leq \Phi_{f,a}(\delta)$.

c) $\Phi_{f,a} \in \mathcal{M}$.

5.3.5 DEFINICIÓN. Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$. Sea $\Phi \in \mathcal{M}$. Diremos que f es Φ-*continua en* a cuando para cada $\delta \in [0,1]$ f posea $(a,\Phi(\delta)\text{-}\delta)$.

f es Φ-continua en a si y sólo si

$$\Phi \leq \Phi_{f,a}$$

y en particular, $\Phi_{f,a}$ es la mayor de las funciones $\Phi \in \mathcal{M}$ tales que f es Φ-continua en a.

Si $\Phi' \leq \Phi$ y f es Φ-continua en a, f es Φ'-continua en a.

Para $\Phi = i_\epsilon$ hablaremos de función ϵ-*continua en* a, y de función *continua en* a para $\Phi = i_0$.

Si $\epsilon \leq \epsilon'$ y f es ϵ-continua en a, f es ϵ'-continua en a.

5.3.6 Si X, Y son espacios topológicos ordinarios, $f : X \to Y$ una aplicación y $a \in X$, f es continua en a si y sólo si lo es en el sentido ordinario (4.1.13).

5.3.7 PROPOSICIÓN

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$, $\Phi \in \mathcal{M}$. Son equivalentes:

(i) f es Φ-continua en a;

(ii) $\Phi\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Es una consecuencia de (5.2.19).

5.3.8 COROLARIO

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$. Son equivalentes:

(i) f es ϵ-continua en a;

(ii) $\epsilon\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;

(iii) $\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} a \;\Rightarrow\; f\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} f(a)$.

Basta aplicar la proposición precedente y la (5.2.20).

5.3.9 TEOREMA

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación.

a) Si $\Phi \in \mathcal{M}$ y f es Φ-continua en cada punto de X, entonces f es Φ-continua.

b) Si $\Phi \in \mathcal{R}$ (2.1.15), f es Φ-continua si y sólo si lo es en cada punto de X.

---

a) Sea $\Phi \in \mathcal{M}$ y supongamos que f es Φ-continua en cada punto de X. Sea $\delta > 0$ y B un δ-abierto de Y; veamos que $f^{-1}(B)$ es un δ-abierto de X. Tomemos $\epsilon < \Phi(\delta)$. Si $a \in f^{-1}(B)$, entonces $f(a) \in B$, luego B es un δ-entorno de $f(a)$ y

$$\mathcal{E}_{f(a)}(B) \geq \delta,$$

luego como f es Φ-continua en a

$$\mathcal{E}_a(f^{-1}(B)) \geq \Phi(\delta) > \epsilon$$

y $f^{-1}(B)$ es un ϵ-entorno de a. Como $f^{-1}(B)$ es un ϵ-entorno de cada uno de sus puntos, es un ϵ-abierto. Y como esto es cierto para cada $\epsilon < \Phi(\delta)$, $f^{-1}(B)$ es un $\Phi(\delta)$-abierto de X. O sea, para cada $\delta > 0$, f posee $(\Phi(\delta)$-$\delta)$, luego f es Φ-continua.

b) Sea $\Phi \in \mathcal{R}$ y supongamos que f es Φ-continua. Sea $a \in X$. Veamos que f es Φ-continua en a. Si $\delta > 0$ y $\mathcal{E}_{f(a)}(V) \geq \delta$, entonces para cada $\delta' < \delta$ V es un δ'-entorno de $f(a)$, luego existe un δ'-abierto B de Y con

$$f(a) \in B \subset V$$

y

$$a \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V).$$

Como $f^{-1}(B)$ es un $\Phi(\delta')$-abierto de X, $f^{-1}(V)$ es un $\Phi(\delta')$-entorno de a, o sea

$$\mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) \geq \Phi(\delta'),$$

$$f\mathcal{E}_a(V) \geq \Phi(\delta'),$$

y esto para cada $\delta' < \delta$, luego

$$f\mathcal{E}_a(V) \geq \sup_{\delta' < \delta} \Phi(\delta') = \Phi(\delta),$$

lo que prueba que f es Φ-continua en a.

La implicación recíproca es la del apartado a).

5.3.10 Ejemplo. Si $\Phi \notin \mathcal{R}$, f puede ser Φ-continua sin serlo en algún punto de X.

Así por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}$ con la topología grosera θ, y sea $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon))$ el e.t.i. de (1.4.4). Consideremos la aplicación idéntica

$$i : (\mathbb{R}, \theta) \to \mathbb{R}_0 .$$

Φ_i es la función característica de $\{1\}$, mientras que $\Phi_{i,0}$ es la función idénticamente nula.

5.3.11 COROLARIO

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Entonces

$$(\forall\, a \in X) \quad \bar{\Phi}_f \leq \Phi_{f,a}$$

y

$$\inf_{a \in X} \Phi_{f,a} \leq \Phi_f .$$

5.3.12 COROLARIO

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Son equivalentes

(i) f es ϵ-continua;

(ii) f es ϵ-continua en cada punto de X.

5.3.13 COROLARIO

Sean $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dos t.i. sobre X. Son equivalentes

(i) $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \, (\simeq \epsilon) \, (\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$;

(ii) $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ y $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$ admiten los mismos filtros ϵ-convergentes y estos además ϵ-convergen hacia los mismos límites.

Si consideramos la aplicación idéntica de X

$$i\,:(X,(\tau_\omega)_\Omega)\rightarrow(X,(\mu_\lambda)_\Lambda)$$

entonces (i) significa que i y i^{-1} son ϵ-continuas en cada punto de X (5.3.12) y esto a su vez equivale a (ii) (5.3.8)

Capítulo 6

Espacios compactos.

Abordamos en este capítulo el estudio de las t.i. para las que es posible asegurar la existencia y/o la unicidad de límites para los ultrafiltros. Como en el caso tradicional hablaremos de t.i. compactas y de t.i. separadas.

La existencia de un ϵ-límite para cada ultrafiltro, equivale también aquí a la existencia para cada filtro de lo que llamaremos un punto ϵ-adherente (6.2.1).

Son generalizables la mayor parte de los resultados clásicos (6.2.4, 6.2.7, 6.2.9, 6.4.6, 6.4.11, 6.4.12, etc.) excepto la caracterización de los espacios compactos mediante la propiedad de Borel-Lebesgue, que no es equivalente a la compacidad sino en un sentido algo relajado (6.3.5 o 6.4.8 y 6.4.9).

Damos también el concepto de ϵ-adherencia de un conjunto A de un e.t.i. (6.1.1) de forma que responda al conjunto de los ϵ-límites de filtros que contienen a A (6.1.11). De todas las adherencias así definidas, la más pequeña recibe el nombre de adherencia dura. Sus puntos se caracterizan por la importante propiedad de (6.1.12).

La caracterización de las aplicaciones continuas mediante las imágenes de las adherencias se conserva aún en nuestro caso.

6.1 Adherencias de un conjunto.

6.1.1 DEFINICIÓN. Sea $(X, (\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $A \subset X$. Representaremos por

$$\epsilon(A)$$

la adherencia de A por $\overset{\circ}{\tau}_\epsilon$; es un conjunto ϵ-cerrado. Se verifica

$$A \subset \epsilon(A)$$

y

$$\epsilon \leq \epsilon' \quad \Rightarrow \quad \epsilon(A) \subset \epsilon'(A)\,.$$

Para cada $\epsilon < 1$, el conjunto

$$d_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} \epsilon'(A)$$

es un ϵ-cerrado que llamaremos la *ϵ-adherencia* de A. La 0-adherencia de A la representaremos por $d(A)$

$$d(A) = \bigcap_{\epsilon > 0} \epsilon(A)$$

y diremos que es la *adherencia dura* de A.

Las adherencias de un conjunto para dos t.i. equivalentes coinciden. Veremos en (7.3.2) que el enunciado recíproco es también cierto.

6.1.2 Cualquiera que sea $\epsilon < 1$

$$d_\epsilon(\emptyset) = \emptyset \qquad \text{y} \qquad d_\epsilon(X) = X\,.$$

6.1.3 Si $A \subset X$ y $0 < \epsilon < 1$

$$A \subset d(A) \subset \epsilon(A) \subset d_\epsilon(A)\,.$$

6.1.4 Si $A \subset X$ y $\epsilon < 1$

$$d_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} d_{\epsilon'}(A)$$

y en particular, si $\epsilon \leq \epsilon' < 1$

$$d_\epsilon(A) \subset d_{\epsilon'}(A)\,.$$

6.1.5 Sea $A \subset X$. Si A es ϵ-cerrado para algún $\epsilon > 0$, entonces

$$d(A) = A\,.$$

6.1.6 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $A \subset X$ y $\epsilon < 1$. Entonces

$$d_\epsilon(d_\epsilon(A)) = d_\epsilon(A).$$

Ya sabemos que

$$d_\epsilon(A) \subset d_\epsilon(d_\epsilon(A)).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
d_\epsilon(d_\epsilon(A)) &= \bigcap_{\epsilon'>\epsilon} \epsilon'(d_\epsilon(A)) \\
&= \bigcap_{\epsilon'>\epsilon} \epsilon' \left(\bigcap_{\epsilon''>\epsilon} \epsilon''(A) \right) \\
&\subset \bigcap_{\epsilon'>\epsilon} \left(\bigcap_{\epsilon''>\epsilon} \epsilon'(\epsilon''(A)) \right) \\
&\subset \bigcap_{\epsilon'>\epsilon} \left(\bigcap_{\epsilon''>\epsilon'} \epsilon'(\epsilon''(A)) \right) \\
&= \bigcap_{\epsilon'>\epsilon} \left(\bigcap_{\epsilon''>\epsilon'} \epsilon''(A) \right) \\
&= \bigcap_{\epsilon''>\epsilon} \epsilon''(A) \\
&= d_\epsilon(A).
\end{aligned}$$

6.1.7 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $A, B \subset X$ y $\epsilon < 1$. Entonces

$$d_\epsilon(A \cup B) = d_\epsilon(A) \cup d_\epsilon(B).$$

$$d_\epsilon(A\cup B)=\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(A\cup B)=\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}(\epsilon'(A)\cup\epsilon'(B))\,,$$

$$d_\epsilon(A)\cup d_\epsilon(B)=\left(\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(A)\right)\bigcup\left(\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(B)\right)\,.$$

Evidentemente

$$\left(\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(A)\right)\bigcup\left(\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(B)\right)\subset\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}(\epsilon'(A)\cup\epsilon'(B))\,.$$

Por otra parte, sea

$$x\in\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}(\epsilon'(A)\cup\epsilon'(B))\,.$$

Si para cada $\epsilon'>\epsilon$, $x\in\epsilon'(A)$ tenemos

$$x\in\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(A)\,.$$

Si no, existe $\epsilon''>\epsilon$ tal que $x\notin\epsilon''(A)$, luego para $\epsilon<\epsilon'\leq\epsilon''$, $x\notin\epsilon'(A)$ y por lo tanto $x\in\epsilon'(B)$, luego

$$x\in\bigcap_{\epsilon'>\epsilon}\epsilon'(B)\,.$$

En cualquier caso, se obtiene la inclusión recíproca y por tanto la igualdad.

6.1.8 Ejemplo. Si (X,τ) es un espacio topológico ordinario, entonces cualesquiera que sean $A\subset X$ y $0<\epsilon<1$

$$d(A)=\epsilon(A)=d_\epsilon(A)=\overline{A}\,,$$

donde $\overline{A}$ representa la adherencia ordinaria de A por τ.

6.1.9 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon))$ de (1.4.4) y sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia de A para la topología usual de $\mathbb{R}$. Para $0 < \epsilon < 1$

$$\epsilon(A) = \overline{A} \cup \mathcal{C} I_\epsilon = \overline{A} \cup (-\infty, -t_\epsilon] \cup [t_\epsilon, \infty)\,,$$

luego

$$d(A) = \overline{A}$$

y si $0 < \epsilon < 1$

$$d_\epsilon(A) = \overline{A} \cup (-\infty, -t_\epsilon] \cup [t_\epsilon, \infty)\,,$$

o sea $x \in d_\epsilon(A)$ cuando

$$x \in \overline{A} \qquad \text{o} \qquad |x| \geq t_\epsilon$$

y en particular, $0 \in d_\epsilon(A)$ si y sólo si $0 \in \overline{A}$.

6.1.10 TEOREMA

Sea X un e.t.i., $A \subset X$, $x \in X$, $\epsilon < 1$. Son equivalentes

(i) $x \in d_\epsilon(A)$;
(ii) $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon \;\Rightarrow\; A \cap V \neq \emptyset$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que $x \in d_\epsilon(A)$. Si $\mathcal{E}_x(V) = \epsilon' > \epsilon$, sea ϵ'' tal que $\epsilon < \epsilon'' < \epsilon'$. Entonces V es un ϵ''-entorno de x y $x \in \epsilon''(A)$ luego $A \cap V \neq \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que (ii) se verifica. Si $\epsilon' > \epsilon$, para cada ϵ'-entorno V de x, $\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon' > \epsilon$, luego $A \cap V \neq \emptyset$. Esto asegura que $x \in \epsilon'(A)$. Por fin

$$x \in \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} \epsilon'(A) = d_\epsilon(A)\,.$$

6.1.11 COROLARIO

Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$, $A \subset X$, $x \in X$. $x \in d_\epsilon(A)$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que

$$\mathcal{F}(A) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x \,.$$

Supongamos que $x \in d_\epsilon(A)$. Como consecuencia del teorema precedente, existe un c-filtro $\mathcal{F}$ sobre X que vale 1 en A y en los subconjuntos V de X tales que $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$; o sea

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{F} \,,$$

y eso significa (4.5.6) que $\mathcal{E}_x \, (\leq \epsilon) \, \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x$.

Recíprocamente, supongamos que tal filtro $\mathcal{F}$ existe. Si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, entonces $\mathcal{F}(V) > \epsilon$ y como $\mathcal{F}(A) = 1$, $A \cap V \neq \emptyset$. Por el teorema anterior, $x \in d_\epsilon(A)$.

6.1.12 COROLARIO

Sea X un e.t.i., $A \subset X$, $x \in X$. $x \in d(A)$ si y sólo si la traza $\mathcal{E}_x|_A$ existe.

Si $x \in d(A)$ resulta del teorema precedente que

$$\mathcal{E}_x(\mathcal{C}A) = 0$$

y la traza existe.

Recíprocamente, si la traza $\mathcal{E}_x|_A$ existe, entonces $\mathcal{E}_x(\mathcal{C}A) = 0$. Si $\mathcal{E}_x(V) > 0$, necesariamente

$$V \not\subset \mathcal{C}A \,,$$

luego

$$A \cap V \neq \emptyset$$

y el teorema anterior asegura entonces que $x \in d(A)$.

6.1.13 Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Para cada $\epsilon, \delta \in [0,1]$, la equivalencia entre

$$\text{(i) } f \text{ posee la propiedad } (\epsilon\text{-}\delta),$$
$$\text{(ii) } (\forall\, A \subset X) \quad f(\epsilon(A)) \subset \delta(f(A)),$$

no es sino el resultado clásico caracterizando las aplicaciones continuas en el sentido ordinario. Se tiene la siguiente generalización:

6.1.14 PROPOSICIÓN

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación, $\epsilon < 1$. Son equivalentes:

(i) f es ϵ-continua;

(ii) $(\forall\, \epsilon \leq \epsilon'' < 1)(\forall\, A \subset X) \quad f(d_{\epsilon'}(A)) \subset d_{\epsilon'}(f(A))$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos f ϵ-continua y sea $\epsilon \leq \epsilon' < 1$ y $A \subset X$. Si $\epsilon'' > \epsilon'$, entonces $\epsilon'' > \epsilon$ y f posee $(\epsilon''\text{-}\epsilon'')$ luego

$$f(\epsilon''(A)) \subset \epsilon''(f(A)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(d_{\epsilon'}(A)) &= f\left(\bigcap_{\epsilon'' > \epsilon'} \epsilon''(A)\right) \\ &\subset \bigcap_{\epsilon'' > \epsilon'} f(\epsilon''(A)) \\ &\subset \bigcap_{\epsilon'' > \epsilon'} \epsilon''(f(A)) \\ &= d_{\epsilon'}(f(A)). \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que (ii) se verifica; veamos que para cada $\epsilon' > \epsilon$, f posee $(\epsilon'\text{-}\epsilon')$. Sea pues $\epsilon' > \epsilon$; si $\epsilon \leq \epsilon'' < \epsilon'$, para cada $A \subset X$

$$\begin{aligned} f(\epsilon''(A)) &\subset f(d_{\epsilon''}(A)) \\ &\subset d_{\epsilon''}(f(A)) \\ &\subset \epsilon'(f(A)), \end{aligned}$$

luego f posee $(\epsilon''\text{-}\epsilon')$. Como esto es cierto para $\epsilon \leq \epsilon'' < \epsilon'$, entonces (2.1.10) f posee $(\epsilon'\text{-}\epsilon')$.

6.1.15 COROLARIO

Sean X, Y e.t.i., $f : X \to Y$ una aplicación. Son equivalentes:

(i) f es continua;

(ii) $(\forall\, \epsilon < 1)(\forall\, A \subset X) \quad f(d_\epsilon(A)) \subset d_\epsilon(f(A))$.

6.2 Puntos adherentes a un filtro.

6.2.1 DEFINICIÓN. Sea X un e.t.i., $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $x \in X$ $\epsilon < 1$. Diremos que x es *ϵ-adherente a $\mathcal{F}$* cuando

$$\mathcal{F}(A) > \epsilon, \quad \mathcal{E}_x(V) > \epsilon \quad \Rightarrow \quad A \cap V \neq \emptyset.$$

Cuando x sea 0-adherente a $\mathcal{F}$, diremos simplemente que x es *adherente a $\mathcal{F}$*.

Si X es un espacio topológico ordinario y $\mathcal{F}$ es un c-filtro sobre X entonces, cualquiera que sea $\epsilon < 1$, x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$ si y sólo si x es adherente a $\mathcal{F}$ en el sentido ordinario.

6.2.2 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, $\epsilon < 1$. El conjunto de los puntos de X que son ϵ-adherentes a $\mathcal{F}$ es el ϵ-cerrado

$$\bigcap_{\mathcal{F}(A) > \epsilon} d_\epsilon(A).$$

Como cada $d_\epsilon(A)$ es ϵ-cerrado (6.1.1), su intersección lo es también. Si x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}(A) > \epsilon$, entonces

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon \quad \Rightarrow \quad A \cap V \neq \emptyset,$$

luego (6.1.10) $x \in d_\epsilon(A)$.

Recíprocamente si

$$\mathcal{F}(A) > \epsilon \quad \Rightarrow \quad x \in d_\epsilon(A)\,,$$

entonces (6.1.10)

$$\mathcal{F}(A) > \epsilon\,, \quad \mathcal{E}_x(V) > \epsilon \quad \Rightarrow \quad A \cap V \neq \emptyset\,,$$

luego x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

6.2.3 COROLARIO

Si x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}(A) > \epsilon$, entonces

$$x \in d_\epsilon(A)\,.$$

6.2.4 TEOREMA

Sea X un e.t.i., $\mathcal{F} \in F(X)$, $x \in X$ $\epsilon < 1$. x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$ si y sólo si existe $\mathcal{G} \in F(X)$ verificando

$$\mathcal{F}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G} \xrightarrow{\epsilon} x\,.$$

Supongamos que x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$. Consideremos el subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ formado por los subconjuntos A de X tales que

$$\mathcal{F}(A) > \epsilon \qquad \text{o} \qquad \mathcal{E}_x(A) > \epsilon\,.$$

Si $A, B \in \mathcal{B}$ se tiene

$$A \cap B \neq \emptyset\,.$$

Sea entonces $\mathcal{G}$ un c-filtro sobre X valiendo 1 en cada elemento de $\mathcal{B}$.

De manera inmediata

$$\mathcal{F}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G} \stackrel{\epsilon}{\to} x\,.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\mathcal{G} \in F(X)$ verificando

$$\mathcal{F}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{G} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G} \stackrel{\epsilon}{\to} x\,.$$

Si $\mathcal{F}(A) > \epsilon$ y $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, entonces

$$\mathcal{G}(A) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad \mathcal{G}(V) > \epsilon\,,$$

luego

$$\mathcal{G}(A \cap V) > \epsilon$$

y

$$A \cap V \neq \emptyset\,,$$

y esto prueba que x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

6.2.5 En particular, si

$$\mathcal{F} \stackrel{\epsilon}{\to} x\,,$$

entonces x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

6.2.6 Si x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}$, entonces x es ϵ-adherente a $\mathcal{G}$.

6.2.7 COROLARIO

Si $\mathcal{U}$ en un ultrafiltro, entonces x es ϵ-adherente a $\mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \stackrel{\epsilon}{\to} x$.

Basta utilizar (6.2.5) por un lado. Por el otro hay que recordar que los ultrafiltros son maximales para la relación $(\leq \epsilon)$ (4.5.7).

6.2.8 COROLARIO

Si $\mathcal{U}$ en un ultrafiltro y x es adherente a $\mathcal{U}$, entonces

$$\mathcal{U} \stackrel{\Phi}{\to} x$$

cualquiera que sea $\Phi \in \mathcal{M}$.

6.2.9 PROPOSICIÓN

Sean X, Y e.t.i., $\epsilon < 1$, $f : X \to Y$ una aplicación ϵ-continua. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y x un punto ϵ-adherente a $\mathcal{F}$. Entonces $f(x)$ es ϵ-adherente a $f\mathcal{F}$.

Sean $A, V \subset Y$ tales que

$$f\mathcal{F}(A) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_{f(x)}(V) > \epsilon\,.$$

Por una parte

$$\mathcal{F}(f^{-1}(A)) = f\mathcal{F}(A) > \epsilon$$

y por otra, como f es ϵ-continua en x

$$\mathcal{E}_x(f^{-1}(V)) = f\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$$

luego

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset\,,$$

y necesariamente

$$A \cap V \neq \emptyset\,.$$

6.3 Espacios compactos.

6.3.1 Sea X un espacio topológico ordinario. Entenderemos que X es un compacto cuando verifique la propiedad de Borel-Lebesgue aún sin ser Hausdorff, o sea cuando (en lenguaje de ciertos autores) sea casi-compacto.

6.3.2 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$. Son entonces equivalentes

(i) Todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X admite un punto ϵ-adherente.

(ii) Todo c-filtro $\mathcal{F}$ sobre X admite un punto ϵ-adherente.

(iii) Para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, existe $x \in X$ tal que

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} x\,.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) es evidente y (ii) $\Rightarrow$ (iii) es consecuencia de (6.2.7).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$$

y como (iii) se cumple, existe $x \in X$ tal que

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} x\,,$$

y resulta entonces de (6.2.4) que x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

6.3.3 Las propiedades de la proposición precedente son aún equivalentes a

(iv) Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X

$$\bigcap_{\mathcal{F}(A)>\epsilon} d_\epsilon(A) \neq \emptyset\,;$$

(v) Para todo c-filtro $\mathcal{F}$ sobre X

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} d_\epsilon(A) \neq \emptyset\,;$$

como se desprende de (6.2.2).

6.3.4 DEFINICIÓN. Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$. Diremos que X es *ϵ-compacto* cuando verifique las propiedades de la proposición (6.3.2).

Un espacio 0-compacto, diremos simplemente que es *compacto*.

Si X es un espacio topológico ordinario, entonces, cualquiera que se $\epsilon < 1$, X es ϵ-compacto si y sólo si lo es en el sentido ordinario.

6.3.5 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Sea $\epsilon < 1$.

a) Si $\mathring{\tau}_\epsilon$ es una topología compacta, entonces X es ϵ-compacto.

b) Si X es ϵ-compacto, entonces para cada $\epsilon' > \epsilon$, la topología $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$ es compacta.

---

a) Supongamos $\mathring{\tau}_\epsilon$ compacta. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X; entonces existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U}$ converge a x para $\mathring{\tau}_\epsilon$, o sea

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{U}\,,$$

luego (5.1.2)

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{U}$$

y

$$\mathcal{E}_x\,(\leq \epsilon)\mathcal{U}$$

que significa

$$\mathcal{U} \overset{\epsilon}{\to} x\,,$$

lo que demuestra que X es ϵ-compacto.

b) Supongamos que X es ϵ-compacto, y sea $\epsilon' > \epsilon$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X; existe $x \in X$ tal que

$$\mathcal{U} \overset{\epsilon}{\to} x\,,$$

luego

$$\mathcal{E}_x\,(\leq \epsilon)\mathcal{U}$$

y (4.5.6)

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{U}\,.$$

Pero como

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon'} \leq \mathcal{E}_{x,\epsilon^+}$$

resulta

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon'} \leq \mathcal{U}$$

y $\mathcal{U}$ converge hacia x para $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$. Esto demuestra que $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$ es compacta.

6.3.6 Los ejemplos que siguen, además de proporcionarnos casos de espacios ϵ-compactos, demuestran que los resultados de la proposición precedente son en cierta manera los mejores posibles.

6.3.7 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon))$ de (1.4.4). Para $0 < \epsilon < 1$, τ_ϵ es compacta, luego $\mathbb{R}_0$ es ϵ-compacto para $0 < \epsilon < 1$. Sin embargo, $\mathbb{R}_0$ no es compacto. Si lo fuera, se tendría (aplicando 6.3.3) que para cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} d(A) \neq \emptyset$$

y, teniendo en cuenta (6.1.9),

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} \overline{A} \neq \emptyset$$

en donde $\overline{A}$ representa la adherencia de A para la topología usual de $\mathbb{R}$. Esto significaría que $\mathbb{R}$ con su topología usual es compacto, lo que es falso.

6.3.8 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $(\mathbb{R}, (\mu_\epsilon))$ análogo al anterior, en donde μ_0 es la topología discreta, μ_1 la topología grosera y para $0 < \epsilon < 1$ μ_ϵ es la extensión trivial a $\mathbb{R}$ de la topología usual del intervalo

$$J_\epsilon = (\epsilon - 1, 1 - \epsilon).$$

Se trata de un t.i. normal. Para $0 < \epsilon \leq 1$, μ_ϵ es compacta, luego el e.t.i. es ϵ-compacto para $0 < \epsilon < 1$. Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se tiene

$$d(A) = \overline{A} \cup (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Entonces, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} d(A) \supset (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

lo que demuestra (6.3.3) que el e.t.i. es compacto. Sin embargo μ_0 no es compacta.

6.3.9 COROLARIO

Todo e.t.i. finito es compacto.

Pues $\overset{\circ}{\tau}_0$, como cualquier otra topología ordinaria en tal conjunto, es compacta.

6.3.10 PROPOSICIÓN

Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que

$$(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,(\leq\epsilon)\,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}\,.$$

Si $(X,(\tau_\omega)_\Omega)$ es ϵ-compacto, entonces $(X,(\mu_\lambda)_\Lambda)$ es ϵ-compacto.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Existe $x\in X$ tal que

$$\mathcal{U}\xrightarrow{\epsilon}x$$

para (τ_ω). Como

$$i\,:(X,(\tau_\omega))\to(X,(\mu_\lambda))$$

es ϵ-continua, luego ϵ-continua en x, resulta de (5.3.8) que

$$\mathcal{U}\xrightarrow{\epsilon}x$$

para (μ_λ), lo que demuestra que $(X,(\mu_\lambda))$ es ϵ-compacto.

6.4 Subconjuntos compactos de un espacio topológico impreciso.

6.4.1 DEFINICIÓN. Sea $(X,(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega})$ un e.t.i., $A\subset X$, $\epsilon<1$. Diremos que A es un *conjunto ϵ-compacto* de X cuando A con la t.i. traza

$$(\tau_\omega|A)_{\omega\in\Omega}$$

sea un e.t.i. ϵ-compacto.

Un conjunto 0-compacto, diremos simplemente que es un *conjunto compacto*.

6.4.2 Interesa caracterizar la compacidad de A en función de las propiedades de los filtros sobre X. La única situación en la que se produce un buen comportamiento en este sentido es aquella en la que para cada punto $x \in A$ coinciden $\mathcal{E}_x^A$, filtro de los entornos de x en A, y $\mathcal{E}_x|_A$, traza del filtro de los entornos de x en X. Esta situación, independientemente de cuál sea A, la encontramos cuando X es accesible (5.1.9). Parte de las proposiciones exigirán entonces esta hipótesis.

6.4.3 PROPOSICIÓN

Todo subconjunto finito de un e.t.i. es compacto.

Basta utilizar (6.3.9).

6.4.4 LEMA

Sea X un e.t.i., $A \subset X$, $\epsilon < 1$. Son equivalentes:

(i) Para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{U}(A) = 1$, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} a$;

(ii) Para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{F}(A) > 0$, existe $a \in A$ tal que a es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$;

(iii) Para todo c-filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{F}(A) = 1$, existe $a \in A$ tal que a es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{F}(A) > 0$. Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{U},$$

luego $\mathcal{U}(A) = 1$. A causa de (i), existe $a \in A$ con

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} a,$$

y esto significa (6.2.4) que a es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) y (iii) $\Rightarrow$ (i) son evidentes.

6.4.5 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$ y A un conjunto ϵ-compacto de X. Entonces se verifican las propiedades (i), (ii) y (iii) del lema precedente.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{U}(A) = 1$. Entonces $\mathcal{U}_A$ existe y es un ultrafiltro sobre A (4.4.2). Existe pues $a \in A$ tal que en A

$$\mathcal{U}_A \stackrel{\epsilon}{\to} a\,,$$

o sea,

$$\mathcal{E}_a^A\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{U}_A\,,$$

luego (5.1.7),

$$\mathcal{E}_a|_A\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{U}_A\,.$$

De (4.5.8) resulta entonces

$$\overline{\mathcal{E}_a|_A}\,(\leq \epsilon)\,\overline{\mathcal{U}_A}\,,$$

y como (4.4.3)

$$\mathcal{E}_a \leq \overline{\mathcal{E}_a|_A} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}_A}\,,$$

resulta

$$\mathcal{E}_a\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{U}$$

y

$$\mathcal{U} \stackrel{\epsilon}{\to} a\,.$$

6.4.6 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i. accesible, $A \subset X$ y $\epsilon < 1$. A es un conjunto ϵ-compacto de X si y sólo si se verifican las propiedades (i), (ii) y (iii) del lema precedente.

Supongamos que se verifica la propiedad (i) del lema y veamos que A es ϵ-compacto.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre A. Su extensión $\bar{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro sobre X (4.4.1), y

$$\bar{\mathcal{U}}(A) = 1\,.$$

Sea entonces $a \in A$ tal que

$$\bar{\mathcal{U}} \stackrel{\epsilon}{\to} a\,,$$

o sea,

$$\mathcal{E}_a\,(\leq \epsilon)\bar{\mathcal{U}}$$

y (4.5.8)

$$\mathcal{E}_a|_A\,(\leq \epsilon)\bar{\mathcal{U}}|_A\,.$$

Pero $\bar{\mathcal{U}}|_A = \mathcal{U}$ (4.4.5) y como X es accesible,

$$\mathcal{E}_a|_A = \mathcal{E}_a^A\,,$$

luego

$$\mathcal{U} \stackrel{\epsilon}{\to} a$$

en el subespacio A. Esto demuestra que A es ϵ-compacto.

6.4.7 Sea X un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada, $A \subset X$, $\epsilon < 1$. Supongamos que A es un compacto de X para $\mathring{\tau}_\epsilon$. Como, con las notaciones de (3.1.4), en general

$$\mathring{\tau}_\epsilon\,|A \not\leq \mathring{\tau^A}_\epsilon\,,$$

no podemos utilizar (6.3.5) para demostrar que A es ϵ-compacto. Sin embargo el hecho es cierto cuando X es accesible, como probamos a continuación.

6.4.8 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i. accesible, $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada, $A \subset X$ y $\epsilon < 1$. Si A es un compacto de X para $\mathring{\tau}_\epsilon$, entonces A es ϵ-compacto.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X con $\mathcal{U}(A) = 1$. $\mathcal{U}_A$ es un ultrafiltro sobre A, luego

$$\mathcal{U}_A \to a \in A$$

en A para $\mathring{\tau}_\epsilon$. De forma inmediata

$$\mathcal{U} \to a$$

en X para $\mathring{\tau}_\epsilon$, luego

$$\mathcal{V}_{a,\epsilon} \leq \mathcal{U}\,,$$

$$\mathcal{E}_{a,\epsilon^+} \leq \mathcal{U}\,,$$

y

$$\mathcal{E}_a\,(\leq \epsilon)\mathcal{U}\,,$$

o sea

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} a$$

y de (6.4.6) deducimos que A es ϵ-compacto.

6.4.9 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada, $A \subset X$, $\epsilon < 1$. Si A es un ϵ-compacto, entonces para cada $\epsilon' > \epsilon$, A es un compacto de X para $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$,

---

Aplicando (6.3.5), para cada $\epsilon' > \epsilon$, $\mathring{\tau}^A{}_{\epsilon'}$ es compacta y como

$$\mathring{\tau}_{\epsilon'}\,|A \leq \mathring{\tau}^A{}_{\epsilon'}\,,$$

también lo es $\mathring{\tau}_{\epsilon'}\,|A$, luego A es un compacto de X para $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$.

6.4.10 Ejemplo. Consideremos el e.t.i. $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon))$ de (1.4.4) y sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y $A = [a, b]$. Para $0 < \epsilon \leq 1$, A es un compacto de $\mathbb{R}$ para τ_ϵ, luego A es un ϵ-compacto de $\mathbb{R}_0$ para $0 < \epsilon < 1$. A es también un compacto de $\mathbb{R}_0$: sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{R}$ con $A \in \mathcal{U}$. Entonces

$$\bigcap_{B \in \mathcal{U}} d(B) = \bigcap_{B \in \mathcal{U}} \overline{B} \supset= \bigcap_{B \in \mathcal{U}_A} \overline{B} \neq \emptyset$$

ya que A es un compacto de $\mathbb{R}$ para la topología usual. Como

$$\bigcap_{B \in \mathcal{U}_A} \overline{B} \subset A,$$

existe $a \in A$ tal que

$$a \in \bigcap_{B \in \mathcal{U}} d(B),$$

luego a es adherente a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \to a$.

6.4.11 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i. accesible y ϵ-compacto. Sea $A \subset X$ tal que

$$A = d_\epsilon(A).$$

Entonces A es ϵ-compacto.

Sea $\mathcal{F}$ un c-filtro sobre X tal que $\mathcal{F}(A) = 1$. Como X es ϵ-compacto existe $x \in X$ tal que x es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$, o sea

$$x \in \bigcap_{\mathcal{F}(B) > \epsilon} d_\epsilon(B),$$

o lo que es lo mismo

$$x \in \bigcap_{B \in \mathcal{F}} d_\epsilon(B).$$

Pero

$$B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{F},$$

luego

$$\bigcap_{B \in \mathcal{F}} d_\epsilon(B) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} d_\epsilon(A \cap B) \subset d_\epsilon(A) = A$$

y entonces

$$x \in A$$

y basta aplicar (6.4.6).

6.4.12 PROPOSICIÓN

Sean X, Y e.t.i. con Y accesible, $f : X \to Y$ una aplicación ϵ-continua. Sea A un conjunto ϵ-compacto de X. Entonces $f(A)$ un conjunto ϵ-compacto de Y.

Como la restricción
$$f|_A : A \to Y$$
es también ϵ-continua, podemos suponer que $A = X$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre Y tal que $\mathcal{U}(f(X)) = 1$. Vamos a demostrar que existe $x \in X$ tal que
$$\mathcal{U} \stackrel{\epsilon}{\to} f(x)$$
lo que probará la proposición, teniendo en cuenta (6.4.6). $f^{-1}\mathcal{U}$ existe. Como es un filtro sobre X y X es ϵ-compacto, $f^{-1}\mathcal{U}$ admite un punto ϵ-adherente x. De (6.2.9) se sigue que $f(x)$ es ϵ-adherente a $f\,f^{-1}\mathcal{U}$, luego a $\mathcal{U}$ (4.3.11 y 6.2.6). Por fin esto significa que
$$\mathcal{U} \stackrel{\epsilon}{\to} f(x).$$

6.4.13 COROLARIO

Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es accesible y
$$(\mu_\lambda)\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega).$$
Si A es un ϵ-compacto de $(X, (\tau_\omega))$, también es un ϵ-compacto de $(X, (\mu_\lambda))$.

6.5 Espacios separados.

6.5.1 DEFINICIÓN. Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$: Diremos que X es *ϵ-separado* cuando

(s1) Si $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $V, W \subset X$ tales que
$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon, \quad \mathcal{E}_y(W) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad V \cap W = \emptyset,$$
y diremos que es *separado* cuando sea ϵ-separado para cada $\epsilon < 1$.

Si $\epsilon' \leq \epsilon$ y X es ϵ-separado, X es ϵ'-separado.

6.5.2 Si X es un espacio topológico ordinario, X es separado (HAUSDORFF) si y sólo si es separado en el sentido de la definición precedente.

6.5.3 Sea X un e.t.i., $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada. Si X es ϵ-separado, $\mathring{\tau}_\epsilon$ es separada. Si existe $\epsilon' > \epsilon$ tal que $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$ es separada, entonces X es ϵ-separado. Sea $\epsilon \in (0,1]$; son equivalentes

(i) Para cada $\epsilon' < \epsilon$, X es ϵ'-separado ;
(ii) Para cada $\epsilon' < \epsilon$, $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$ es separada .

6.5.4 Ejemplo. Sea $\mathbb{R}_0 = (\mathbb{R}, (\tau_\epsilon))$ el e.t.i. del ejemplo (1.4.4). Consideremos el subespacio

$$A = [-1, 1] .$$

Para $\epsilon < 1/2$, $\tau_\epsilon | A$ es separada. Luego $\mathring{\tau^A}_\epsilon$ que es más fina (3.1.7) también lo es. Entonces A es ϵ-separado para cada $\epsilon < 1/2$.

$\tau_{1/2}|A$ no es separada, pero $\mathring{\tau^A}_{1/2}$ sí que lo es. Pero sin embargo A no es 1/2-separado, pues cualquiera que sea $\epsilon' > 1/2$, $\mathring{\tau^A}_{\epsilon'}$ no separa 1 y -1 .

6.5.5 TEOREMA

Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$. Son equivalentes:

(i) X es ϵ-separado;

(ii) Un filtro sobre X tiene a lo sumo un ϵ-límite;

(iii) X Un filtro sobre X que posee un ϵ-límite x, tiene únicamente a x como punto ϵ-adherente.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sea $\mathcal{F} \in F(X)$ y $x \in X$ tales que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x\,.$$

Sea $y \neq x$ tal que y sea ϵ-adherente a $\mathcal{F}$. Si $V, W \subset X$ son tales que

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_y(W) > \epsilon$$

entonces

$$\mathcal{F}(V) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_y(W) > \epsilon$$

luego (6.2.1)

$$V \cap W \neq \emptyset\,,$$

y esto demuestra que X no es ϵ-separado.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) es evidente.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que X no es ϵ-separado. Existen entonces $x, y \in X$, $x \neq y$ tales que

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon\,,\ \mathcal{E}_y(W) > \epsilon \quad \Rightarrow \quad V \cap W \neq \emptyset\,.$$

Consideremos el subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ formado por los subconjuntos A de X tales que

$$\mathcal{E}_x(A) > \epsilon \qquad \text{o} \qquad \mathcal{E}_y(A) > \epsilon\,.$$

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, necesariasmente $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{F}$ un c-filtro sobre X valiendo 1 en cada elemento de $\mathcal{B}$. Entonces

$$\mathcal{E}_x\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_y\,(\leq \epsilon)\,\mathcal{F}$$

luego

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} y\,,$$

lo que va en contra de (ii).

6.5.6 LEMA

Sean X, Y e.t.i. con Y ϵ-separado, $f : X \to Y$ una aplicación ϵ-continua. Sean $x, y \in X$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Existen $V, W \subset X$ tales que

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon\,, \quad \mathcal{E}_y(W) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad V \cap W = \emptyset\,.$$

En efecto, existen $V', W' \subset Y$ tales que

$$\mathcal{E}_{f(x)}(V') > \epsilon\,, \quad \mathcal{E}_{f(y)}(W') > \epsilon \qquad \text{y} \qquad V' \cap W' = \emptyset\,.$$

Ponemos

$$V = f^{-1}(V')\,, \qquad W = f^{-1}(W')$$

y necesariamente

$$V \cap W = \emptyset\,.$$

Además f es ϵ-continua en x e y (5.3.12), luego

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_y(W) > \epsilon\,.$$

6.5.7 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i., $\epsilon < 1$. Si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existe una aplicación

$$f : X \to Y$$

ϵ-continua de X en un e.t.i. ϵ-separado Y, tal que $f(x) \neq f(y)$, entonces X es ϵ-separado.

6.5.8 COROLARIO

Todo subespacio de un e.t.i. ϵ-separado, es ϵ-separado.

6.5.9 COROLARIO

Sean $(\tau_\omega)_{\omega \in \Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que

$$(\mu_\lambda)\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega)\,.$$

Si $(X, (\mu_\lambda))$ es ϵ-separado, entonces $(X, (\tau_\omega))$ es ϵ-separado.

6.5.10 PROPOSICIÓN

Sea X un e.t.i. ϵ-separado. Sea A un conjunto ϵ-compacto de X. Entonces

$$A = d_\epsilon(A) .$$

Sea $x \in d_\epsilon(A)$. Existe (6.1.11) un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que

$$\mathcal{F}(A) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} x .$$

Como A es ϵ-compacto, existe $a \in A$ tal que a es ϵ-adherente a $\mathcal{F}$. Por fin (6.5.5) se tiene necesariamente $x = a$. Esto demuestra que $d_\epsilon(A) \subset A$.

6.5.11 PROPOSICIÓN

Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que

$$(\mu_\lambda)\,(\leq \epsilon)\,(\tau_\omega) .$$

Supongamos que (μ_λ) es separada y que (τ_ω) es ϵ-compacta. Entonces

$$(\mu_\lambda)\,(\simeq \epsilon)\,(\tau_\omega) .$$

Representemos por $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ y $(\mathring{\mu}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ las respectivas t.i. normales asociadas. Sea ϵ' con $\epsilon < \epsilon' < 1$; entonces $\mathring{\tau}_{\epsilon'}$ es compacta, $\mathring{\mu}_{\epsilon'}$ es separada y

$$\mathring{\mu}_{\epsilon'} \leq \mathring{\tau}_{\epsilon'}$$

luego, resulta por una propiedad clásica que

$$\mathring{\mu}_{\epsilon'} = \mathring{\tau}_{\epsilon'} \quad .$$

Como además esto implica que

$$\mathring{\mu}_1 = \mathring{\tau}_1 ,$$

se obtiene el resultado.

6.5.12 COROLARIO

Sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que

$$(\mu_\lambda) \leq (\tau_\omega)\,.$$

Supongamos que (μ_λ) es separada y que (τ_ω) es compacta. Entonces

$$(\mu_\lambda) \simeq (\tau_\omega)\,.$$

Capítulo 7

Generación de topologías imprecisas.

Una t.i. sobre un conjunto X queda en lo esencial caracterizada por el filtro de los entornos de cada punto y también por las ϵ-adherencias de cada subconjunto de X. Al decir en lo esencial, nos referimos a que, si bien no es posible obtener la t.i. propiamente dicha con estos elementos, sí podemos conocer su t.i. normal asociada (7.2.2 y 7.3.2).

Caracterizamos también las topologías ordinarias mediante los filtros de entornos y las adherencias (7.2.3 y 7.3.3).

Por fin, abordamos brevemente el estudio de la t.i. para las que son equivalentes

(i) $\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon$,
(ii) V es un ϵ-entorno de x,

cualesquiera que sean $x \in X$ y $V \subset X$. Llamamos simples a tales t.i. en consideración al hecho de que el ejemplo más característico de esta situación lo constituyen las t.i. dadas por una cadena finita de topologías (7.1.1 y 7.1.4).

7.1 Generación por una cadena finita de topologías.

7.1.1 Sea X un conjunto y sea

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_n$$

una cadena finita de topologías sobre X. Sean $p_1, p_2, \dots, p_n$ números reales > 0 tales que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\,.$$

Ponemos

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$$

dotado de su orden natural y consideremos la probabilidad

$$p\ : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$$

dada para cada $I \subset \Omega$ por

$$p(I) = \sum_{i\in I} p_i\,.$$

La familia

$$(\tau_i)_{i\in\Omega}$$

es una t.i. accesible sobre X.

7.1.2 la t.i. normal $(\overset{\circ}{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ asociada a $(\tau_i)_{i\in\Omega}$ viena dada, al margen de $\overset{\circ}{\tau}_0$ que es la topología discreta, por

$$\overset{\circ}{\tau}_\epsilon = \begin{cases} \tau_1 \quad \text{si} \quad 0 < \epsilon \le p_1\,, \\ \tau_2 \quad \text{si} \quad p_1 < \epsilon \le p_1 + p_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau_n \quad \text{si} \quad p_1 + \cdots + p_{n-1} < \epsilon \le 1\,. \end{cases}$$

7.1.3 Ejemplo. Una topología ordinaria es de este tipo. También lo es la t.i. del ejemplo (1.3.7).

7.1.4 Si $x \in X$ y $V \subset X$, entonces V es un ϵ-entorno de x para $\epsilon \in [0, \lambda]$ con $0 \le \lambda \le 1$, o bien no lo es para ningún ϵ. En particular, para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} = \bigcap_{0<\epsilon'<\epsilon} \mathcal{V}_{x,\epsilon'}$$

(con las notaciones de 5.1.1) o sea

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon} = \mathcal{V}_{x,\epsilon}\,.$$

7.1.5 Si $A \subset X$ se tiene que $d_\epsilon(A)$ es la adherencia ordinaria de A por

$$\begin{array}{ll} \tau_1 & \text{para} \quad \epsilon < p_1\,, \\ \tau_2 & \text{para} \quad p_1 \leq \epsilon < p_1 + p_2\,, \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \tau_n & \text{para} \quad p_1 + \cdots + p_{n-1} \leq \epsilon < 1\,. \end{array}$$

7.1.6 X es compacto si y sólo si τ_1 es compacta.

7.1.7 X es separado si y sólo si τ_n es separada.

7.1.8 Si $A \subset X$, la traza de $(\tau_i)_{i \in \Omega}$ sobre A es aún una t.i. del mismo tipo. Además, resulta inmediatamente que para todo $\epsilon \in [0,1]$

$$\overset{\circ}{\tau}{}^{A}{}_{\epsilon} = \overset{\circ}{\tau}_{\epsilon} \, |A$$

con las notaciones de (3.1.4).

7.2 Generación de t.i. por entornos.

7.2.1 Sea X un e.t.i. y para cada $x \in X$, sea $\mathcal{E}_x$ el filtro de los entornos de x. La familia de filtros $(\mathcal{E}_x)_{x \in X}$ verifica

(e1) $\mathcal{E}_x(\mathcal{C}\{x\}) = 0$;

(e2) Si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, existe $A \subset X$ tal que $\mathcal{E}_x(A) > \epsilon$ y para cada $a \in A$, $\mathcal{E}_a(V) > \epsilon$.

La propiedad **(e1)** es inmediata.

Para la segunda, si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, sea ϵ' tal que

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon' > \epsilon\,;$$

entonces $V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon'}$ y existe un ϵ'-abierto A de X tal que

$$x \in A \subset V\,.$$

Tenemos

$$\mathcal{E}_x(A) \geq \epsilon' > \epsilon$$

y para cada $a \in A$

$$\mathcal{E}_a(V) \geq \epsilon' > \epsilon\,.$$

7.2.2 TEOREMA

Sea X un conjunto no vacío y sea

$$(\mathcal{F}_x)_{x\in X}$$

una familia de filtros sobre X verificando

(e1) $\mathcal{F}_x(\mathcal{C}\{x\}) = 0$;

(e2) Si $\mathcal{F}_x(V) > \epsilon$, existe $A \subset X$ tal que $\mathcal{F}_x(A) > \epsilon$ y para cada $a \in A$, $\mathcal{F}_a(V) > \epsilon$.

Entonces, existe una t.i. sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ es el filtro de los entornos de x.. Cualquier t.i. equivalente a ésta verifica la misma propiedad. Dos t.i. verificando tal propiedad son equivalentes. Si para las t.i. verificando esta propiedad designamos por $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los ϵ-entornos de un punto x, tenemos para $0 < \epsilon < 1$

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{F}_{x,\epsilon}\,.$$

Sea τ_o la topología discreta sobre X. Si $0 < \epsilon < 1$, consideremos para cada $x \in X$ el c-filtro $\mathcal{F}_{x,\epsilon^+}$. Gracias a **(e1)** y **(e2)** existe una topología ordinaria única sobre X tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{F}_{x,\epsilon^+}$ es el c-filtro de los entornos de x. Designaremos por τ_ϵ dicha topología. Sea por fin

$$\tau_1 = \inf_{\epsilon<1} \tau_\epsilon\,.$$

$(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ así definida es una t.i. sobre X. Esta t.i. no es normal en general. Designemos por $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los ϵ-entornos de x para esta t.i. Sea $x \in X$ y $0 < \epsilon < 1$. Si $V \in \mathcal{F}_{x,\epsilon^+}$, entonces V es un entorno de x para τ_ϵ, luego V es un ϵ-entorno de x y $V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}$. Si $V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}$, entonces para cada $\epsilon' < \epsilon$ V es un entorno de x para $\tau_{\epsilon'}$, luego

$$(\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad V \in \mathcal{F}_{x,\epsilon^+}$$

y (4.1.7) $V \in \mathcal{F}_{x,\epsilon}$. Hemos demostrado así que

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{F}_{x,\epsilon}\,.$$

Designemos por $\mathcal{E}_x$ el filtro de los entornos de x para $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$. Se tiene también para $0 < \epsilon < 1$

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{E}_{x,\epsilon}$$

(5.1.2) y se prueba entonces sin dificultad que

$$(\forall\, x) \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{F}_x\,.$$

La t.i. $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ verifica pues la propiedad requerida. Vimos en (5.1.3) que toda t.i. equivalente a ésta la verifica asimismo.

Por fin, sean $(\tau_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(\mu_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dos t.i. sobre X tales que para cada $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ sea el filtro de los entornos de x . Aplicando (5.3.13) resulta inmediatamente que ambas t.i. son equivalentes.

7.2.3 COROLARIO

En las condiciones del teorema precedente se tiene la equivalencia de

(i) Cada $\mathcal{F}_x$ es un c-filtro;

(ii) Existe una topología ordinaria sobre X tal que para cada x , $\mathcal{E}_x = \mathcal{F}_x$;

(iii) Toda t.i. sobre X tal que para cada x , $\mathcal{E}_x = \mathcal{F}_x$, es equivalente a una topología ordinaria.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que cada $\mathcal{F}_x$ es un c-filtro. **(e1)** y **(e2)** se escriben entonces

(e1) $V \in \mathcal{F}_x \quad \Rightarrow \quad x \in V$;

(e2) Si $V \in \mathcal{F}_x$, existe $A \subset X$ tal que $A \in \mathcal{F}_x$ y para cada $a \in A$, $V \in \mathcal{F}_a$.

Sea entonces τ la única topología ordinaria sobre X tal que para cada x , $\mathcal{F}_x$ sea el c-filtro de los entornos de x por τ . Evidentemente, para cada x , $\mathcal{E}_x = \mathcal{F}_x$ (4.1.13).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Pues en un espacio topológico ordinario el filtro de los entornos de un punto es un c-filtro (4.1.13).

Por fin la equivalencia de (ii) y (iii) viene dada por el teorema anterior.

7.2.4 Como se desprende del ejemplo (4.1.16) no es posible precisar más las desigualdades

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{F}_{x,\epsilon}$$

del teorema (7.2.2). Para poder hacerlo necesitamos las hipótesis más fuertes que estudiamos a continuación.

7.2.5 DEFINICIÓN. Un e.t.i. X diremos que es *simple* cuando para cada $x \in X$, $V \subset X$ y $\epsilon > 0$ se tiene

(sm1) $(\forall\, \epsilon' < \epsilon)$ V es ϵ'-entorno de x $\Rightarrow$ V es un ϵ-entorno de x.

Si una t.i. es simple, lo son todas las t.i. equivalentes a ella.

Son equivalentes

(i) X es simple;
(ii) $(\forall\, x \in X)(\forall\, \epsilon > 0)$ $\quad \mathcal{V}_{x,\epsilon} = \bigcap_{\epsilon' < \epsilon} \mathcal{V}_{x,\epsilon'}$;
(iii) $(\forall\, x \in X)(\forall\, \epsilon > 0)$ $\quad \mathcal{E}_{x,\epsilon} = \mathcal{V}_{x,\epsilon}$.

7.2.6 Ejemplo. Un e.t.i. generado por una cadena finita de topologías es simple (7.1.4). En particular son simples los espacios topológicos ordinarios.

El e.t.i. del ejemplo (1.4.4) no es simple (4.1.16).

7.2.7 Sea X un e.t.i. simple y para cada $x \in X$, sea $\mathcal{E}_x$ el filtro de los entornos de x. Se verifica

(e3) Si $\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon > 0$, existe $A \subset X$ tal que $\mathcal{E}_x(A) \geq \epsilon$ y para cada $a \in A$, $\mathcal{E}_a(V) \geq \epsilon$.

7.2.8 PROPOSICIÓN

Sea X un conjunto no vacío y sea

$$(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$$

una familia de filtros sobre X verificando

(e1) $\mathcal{F}_x(\mathcal{C}\{x\}) = 0$;

(e3) Si $\mathcal{F}_x(V) \geq \epsilon > 0$, existe $A \subset X$ tal que $\mathcal{F}_x(A) \geq \epsilon$ y para cada $a \in A$, $\mathcal{F}_a(V) \geq \epsilon$.

Entonces, existe una t.i. sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ es el filtro de los entornos de x.. Cualquier t.i. equivalente a ésta verifica la misma propiedad. Dos t.i. verificando tal propiedad son equivalentes. Las t.i. verificando tal propiedad son simples. Si representamos por $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los ϵ-entornos de x para estas t.i. se tiene para $\epsilon > 0$

$$\mathcal{V}_{x,\epsilon} = \mathcal{F}_{x,\epsilon}\,.$$

En primer lugar $(\mathcal{F}_x)_{x \in X}$ verifica también **(e2)**, luego estamos en las condiciones del teorema (7.2.2).

Sea τ_0 la topología discreta sobre X. Si $\epsilon > 0$, las propiedades **(e1)** y **(e3)** aseguran la existencia de una topología ordinaria única sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{F}_{x,\epsilon}$ sea el c-filtro de los entornos de x. Designaremos por τ_ϵ dicha topología. Veamos que la t.i. $(\tau_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ es normal. Si $\epsilon > 0$ y V es un entorno de x para

$$\inf_{\epsilon' < \epsilon} \tau_{\epsilon'}$$

entonces para $\epsilon' < \epsilon$, V es entorno de x para $\tau_{\epsilon'}$, luego

$$\epsilon' < \epsilon \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{F}_{x,\epsilon'}$$

y por tanto $V \in \mathcal{F}_{x,\epsilon}$, o sea V es entorno de x para τ_ϵ. Esto demuestra que

$$\tau_\epsilon \geq \inf_{\epsilon' < \epsilon} \tau_{\epsilon'}\,.$$

Para esta t.i. normal se verifica

$$(\forall\, x \in X)(\forall\, \epsilon > 0) \quad \mathcal{V}_{x,\epsilon} = \mathcal{F}_{x,\epsilon}\,.$$

Como en particular las desigualdades

$$\mathcal{F}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{F}_{x,\epsilon}$$

son válidas, el resto de la demostración es la de (7.2.2).

7.3 Generación de t.i. por adherencias.

7.3.1 Sea X un e.t.i. y para cada $A \subset X$ y $\epsilon < 1$ sea $d_\epsilon(A)$ la ϵ-adherencia de A. Se verifica (6.1.2 a 6.1.7):

(ad1) $(\forall\, \epsilon < 1) \quad d_\epsilon(\emptyset) = \emptyset\,;$

(ad2) $(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} d_{\epsilon'}(A)\,;$

(ad3) $(\forall\, A \subset X) \quad A \subset d(A)\;;$

(ad4) $(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d_\epsilon(d_\epsilon(A)) = d_\epsilon(A)\,;$

(ad5) $(\forall\, A, B \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d_\epsilon(A \cup B)) = d_\epsilon(A) \cup d_\epsilon(B)\,.$

7.3.2 TEOREMA

Sea X un conjunto y sea

$$\begin{aligned} d\, :\, [0,1) \times \mathcal{P}(X) &\to \mathcal{P}(X) \\ (\epsilon, A) &\to d(\epsilon, A) \end{aligned}$$

una aplicación verificando

(ad1) $(\forall\, \epsilon < 1) \quad d(\epsilon, \emptyset) = \emptyset\,;$

(ad2) $(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d(\epsilon, A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} d(\epsilon', A)\,;$

(ad3) $(\forall\, A \subset X) \quad A \subset d(0, A)\;;$

(ad4) $(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d(\epsilon, d(\epsilon, A)) = d(\epsilon, A)\,;$

(ad5) $(\forall A, B \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d(\epsilon, A \cup B) = d(\epsilon, A) \cup d(\epsilon, B)\,.$

Entonces, existe una t.i. sobre X tal que para cada $A \subset X$ y $\epsilon < 1$, $d(\epsilon, A)$ es la ϵ-adherencia de A. Cualquier t.i. equivalente a ésta verifica la misma propiedad. Dos t.i. verificando tal propiedad son equivalentes.

De **(ad2)** y **(ad3)** se obtienen inmediatamente

$$\epsilon \leq \epsilon' \quad \Rightarrow \quad d(\epsilon, A) \subset d(\epsilon', A)\,,$$

$$(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad A \subset d(\epsilon, A)\,.$$

Sea $0 < \epsilon < 1$. La aplicación separada

$$\begin{aligned} a\,:\, \mathcal{P}(X) &\to \mathcal{P}(X) \\ A &\to d(\epsilon, A) \end{aligned}$$

verifica

$$a(\emptyset) = \emptyset\,,$$

$$A \subset a(A)\,,$$

$$a(a(A)) = a(A)\,,$$

$$a(A \cup B) = a(A) \cup a(B)\,.$$

Existe entonces una única topología ordinaria sobre X tal que para cada $A \subset X$, $a(A) = d(\epsilon, A)$ sea su adherencia. Representamos por τ_ϵ dicha topología. Además designamos por τ_0 la topología discreta y por τ_1 la topología

$$\tau_1 = \inf_{0<\epsilon<1} \tau_\epsilon\,.$$

Como

$$\epsilon \leq \epsilon' \quad \Rightarrow \quad d(\epsilon, A) \subset d(\epsilon', A)\,,$$

resulta que $(\tau_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es una t.i. sobre X (que no es normal en general).

Si representamos por $(\mathring{\tau}_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ la t.i. normal asociada se tiene

$$(\forall\, \epsilon \in [0,1]) \quad \tau_\epsilon \leq \mathring{\tau}_\epsilon$$

y

$$\epsilon' < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \mathring{\tau}_\epsilon \leq \tau_{\epsilon'}\,.$$

Para cada ϵ y cada $A \subset X$ representamos por $\epsilon(A)$ la adherencia de A por $\mathring{\tau}_\epsilon$.

Si $0 < \epsilon < 1$

$$\bigcup_{\epsilon' < \epsilon} d(\epsilon', A) \subset \epsilon(A) \subset d(\epsilon, A)$$

como se prueba de forma sencilla. Representemos por $d_\epsilon(A)$ la ϵ-adherencia de A para $(\tau_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$. Sea $A \subset X$ y $0 \leq \epsilon < 1$. Por una parte

$$d_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} \epsilon'(A) \subset \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} d(\epsilon', A) = d(\epsilon, A).$$

Por otra si $\epsilon' > \epsilon$ y tomamos $\epsilon < \epsilon'' < \epsilon'$

$$d_\epsilon(A) = \bigcap_{\delta > \epsilon} d(\delta, A) \subset d(\epsilon'', A) \subset \epsilon'(A),$$

luego

$$d_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon' > \epsilon} \epsilon'(A) = d_\epsilon(A).$$

Hemos probado así que para $(\tau_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$

$$(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon < 1) \quad d_\epsilon(A) = d(\epsilon, A).$$

Como se deduce de (6.1.1) cualquier t.i. equivalente a ésta verifica la misma propiedad.

Por fin, la equivalencia de dos t.i. verificando tal propiedad se prueba inmediatamente aplicando el corolario (6.1.15) a la aplicación idéntica de X.

7.3.3 COROLARIO

En las condiciones del teorema precedente, se tiene la equivalencia de:

(i) $(\forall\, A \subset X)(\forall\, \epsilon, \epsilon') \quad d(\epsilon, A) = d(\epsilon', A)$,

(ii) Las t.i. verificando el resultado del teorema son aquéllas que son equivalentes a la topología ordinaria sobre X tal que para cada $A \subset X$

$$\overline{A} = d(0, A).$$

Se deduce inmediatamente de que las t.i. verificando la conclusión del teorema cumplen

$$\bigcup_{\epsilon' > \epsilon} d(\epsilon', A) \subset \epsilon(A) \subset d(\epsilon, A)\,,$$

hecho que hemos visto en la demostración del teorema.

Capítulo 8

Topologías imprecisas definidas por una distancia.

Estudiamos en este capítulo las t.i. definidas por una métrica, entendida del modo siguiente: no conocemos exactamente la distancia entre dos puntos del conjunto, pero sí la probabilidad de que dicha distancia se encuentre en un intervalo dado. De esta manera asignamos a cada par de elementos x, y una distribución de probabilidad μ_{xy} de modo que la separación entre x e y es menor que r con probabilidad $\mu_{xy}([0, r))$.

Obtenemos así la noción de distancia, que constituye como vemos en (8.1.3 y 8.1.4) una generalización de las semidistancias ordinarias. Las propiedades **(d1)** y **(d2)** que exigimos (8.1.2) poseen un significado obvio. La propiedad **(d3)** es análoga a la clásica desigualdad triangular, aunque también presenta semejanzas con una propiedad más fuerte, la desigualdad ultramétrica, como permite entrever el ejemplo (8.1.5). En este ejemplo y el siguiente vemos que una distancia ultramétrica 'corregida' por un factor de inseguridad (menor cuanto mayor es la separación) se convierte en una distancia en el sentido de nuestra definición.

Dada una distancia sobre X, construimos el filtro de los entornos de cada punto y, utilizando el teorema (7.2.2), una t.i. sobre X.

Las propiedades topológicas de la t.i. así construída se caracterizan de forma muy sencilla con la ayuda de sucesiones, obteniéndose prácticamente todos los resultados que son clásicos en un espacio métrico ordinario.

8.1 Distancia sobre un conjunto.

8.1.1 Designaremos por $\mathcal{M}_1^+[0, \infty)$ el conjunto de las medidas de Radon positivas sobre $[0, \infty)$ que son de masa 1.

Si $\mu \in \mathcal{M}_1^+[0,\infty)$ y $r > 0$ escribiremos para simplificar

$$\mu(r) = \mu[0,r)\,.$$

Si $r \in \mathrm{I\!R}$ representaremos por δ_r la medida de DIRAC centrada en r. Para $r > 0$

$$\delta_r \in \mathcal{M}_1^+[0,\infty)\,.$$

8.1.2 DEFINICIÓN. Sea X un conjunto. Una *distancia* sobre X es una aplicación

$$\begin{aligned} \mu \,:\, X \times X &\to \mathcal{M}_1^+[0,\infty) \\ (x,y) &\to \mu_{xy} \end{aligned}$$

verificando

(d1) $(\forall\, x \in X) \quad \mu_{xx} = \delta_0\,;$

(d2) $(\forall\, x, y \in X) \quad \mu_{xy} = \mu_{yx}\,;$

(d3) $(\forall\, x, y, z \in X)(\forall\, r, s > 0)$

$$\mu_{xy}(r+s) \geq \min(\mu_{xz}(r), \mu_{zy}(s))\,.$$

8.1.3 Sea μ una distancia sobre X tal que para cada $x, y \in X$, μ_{xy} sea una medida de DIRAC. Designemos por $d(x,y)$ el centro de la medida μ_{xy}, o sea

$$\mu_{xy} = \delta_{d(x,y)}\,.$$

Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} d \,:\, X \times X &\to [0,\infty) \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

es una semidistancia ordinaria. En efecto, $d(x,x) = 0$ gracias a **(d1)** y $d(x,y) = d(y,x)$ gracias a **(d2)**.

Sean por otra parte $x, y, z \in X$. Si

$$\lambda > d(x,z) + d(z,y)\,,$$

entonces

$$\lambda = r + s$$

con $r > d(x,z)$ y $s > d(z,y)$, y como entonces

$$\mu_{xz}(r) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mu_{zy}(s) = 1\,,$$

resulta de **(d3)** que

$$\mu_{xy}(r+s) = 1$$

o sea

$$\lambda > d(x,y)\,,$$

lo que prueba que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\,.$$

Diremos que d es la semidistancia ordinaria asociada a μ.

8.1.4 Recíprocamente, sea

$$\begin{aligned} d\,:\, X \times X &\to [0,\infty) \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

una semidistancia ordinaria sobre X, y para cada $x, y \in X$ pongamos

$$\mu_{xy} = \delta_{d(x,y)}\,.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} \mu\,:\, X \times X &\to \mathcal{M}_1^+[0,\infty) \\ (x,y) &\to \mu_{xy} \end{aligned}$$

es entonces una distancia sobre X. En efecto, **(d1)** y **(d2)** son inmediatas. En cuanto a **(d3)**, si

$$\mu_{xy}(r+s) = 0$$

entonces

$$r + s \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

luego
$$r \leq d(x,z) \qquad \text{o} \qquad s \leq d(z,y)$$
y
$$\mu_{xz}(r) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mu_{zy}(s) = 0\,.$$
Diremos que μ es la distancia asociada a la semidistancia ordinaria d.

8.1.5 Ejemplo. Sea X un conjunto y
$$d\,:\,X \times X \to \mathbb{R}^+$$
una distancia ordinaria ultramétrica sobre X, esto es, una distancia ordinaria verificando además
$$(\forall\, x,y,z \in X) \quad d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))\,.$$
Para cada $x,y \in X$ pongamos entonces
$$\mu_{xy} = \frac{1}{1+d(x,y)}\,\delta_0 + \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,\delta_{d(x,y)}\,.$$
La aplicación
$$\begin{aligned} \mu\,:\,X \times X &\to \mathcal{M}_1^+[0,\infty) \\ (x,y) &\to \mu_{xy} \end{aligned}$$
así definida, es una distancia sobre X.

En efecto; μ verifica obviamente **(d1)** y **(d2)**. Veamos **(d3)**. Sean $x,y,z \in X$, $r,s > 0$. Supongamos que, por ejemplo
$$d(x,y) \leq d(x,z)\,.$$
Si $\mu_{xy}(r+s) < 1$, entonces
$$\mu_{xy}(r+s) = \frac{1}{1+d(x,y)} \qquad \text{y} \qquad r+s \leq d(x,y)$$
luego
$$r \leq d(x,y) \leq d(x,z)$$
y
$$\mu_{xz}(r) = \frac{1}{1+d(x,z)} \leq \frac{1}{1+d(x,y)} = \mu_{xy}(r+s)$$

luego

$$\mu_{xy}(r+s) \geq \min(\mu_{xz}(r), \mu_{zy}(s)) .$$

Como, si $\mu_{xy}(r+s) = 1$, la desigualdad es evidente, se verifica siempre **(d3)**.

8.1.6 Ejemplo. Sea X un conjunto y d una distancia ordinaria ultramétrica sobre X . Si

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$$

es una función decreciente y ponemos

$$\mu_{xy} = \Phi \circ d(x,y)\, \delta_0 + (1 - \Phi \circ d(x,y))\, \delta_{d(x,y)} ,$$

obtenemos, de forma análoga al ejemplo anterior, una distancia sobre X.

8.2 T.i. dada por una distancia.

8.2.1 Sea μ una distancia sobre X. Para cada $x \in X$, $r > 0$ y $\epsilon \in (0,1]$ definimos el subconjunto de X

$$B_\epsilon(x,r) = \{y \in X \mid \mu_{xy}(r) > 1 - \epsilon\} ,$$

o lo que es lo mismo

$$B_\epsilon(x,r) = \{y \in X \mid \mu_{xy}[r,\infty) < \epsilon\} .$$

8.2.2 Si μ es una distancia como la de (8.1.3) y d es la semidistancia ordinaria asociada, el conjunto $B_\epsilon(x,r)$ es, cualquiera que sea $\epsilon > 0$, la bola dada por d con centro x y radio r

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} .$$

8.2.3 Cualesquiera que sean $r > 0$ y $\epsilon > 0$

$$x \in B_\epsilon(x,r) .$$

8.2.4 Si $x \in X$, $r > 0$ y $0 < \epsilon' \leq \epsilon$

$$B_{\epsilon'}(x,r) \subset B_{\epsilon}(x,r) .$$

8.2.5 Si $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $0 < r' \leq r$

$$B_{\epsilon}(x,r') \subset B_{\epsilon}(x,r) .$$

8.2.6 Para cada $x \in X$ definimos entonces

$$\mathcal{E}_x \, : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$$

poniendo

$$\mathcal{E}_x \, (V) = \sup \{\epsilon > 0 \,|\, (\exists \, r > 0) \quad B_{\epsilon}(x,r) \subset V\}$$

si el conjunto de tales ϵ es no vacío y

$$\mathcal{E}_x \, (V) = 0$$

en caso contrario.

Si $\mathcal{E}_x \, (V) \geq \alpha > 0$, entonces para cada $0 < \epsilon < \alpha$ existe $r > 0$ tal que

$$B_{\epsilon}(x,r) \subset V .$$

Las aplicaciones $\mathcal{E}_x$ verifican:

8.2.7 PROPOSICIÓN

Para cada $x \in X$, $\mathcal{E}_x$ es un filtro sobre X. La familia de filtros $(\mathcal{E}_x)_{x\in X}$ verifica

(e1) $\mathcal{E}_x(\mathcal{C}\{x\}) = 0$;

(e2) Si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, existe $A \subset X$ tal que $\mathcal{E}_x(A) > \epsilon$ y para cada $a \in A$, $\mathcal{E}_a(V) > \epsilon$.

Cada $\mathcal{E}_x$ verifica evidentemente **(f1)**, **(f2)** y **(f4)**. Veamos que verifica **(f5)** o sea

$$\mathcal{E}_x(V \cap W) \geq \min(\mathcal{E}_x(V), \mathcal{E}_x(W)) .$$

Sea $\alpha = \min(\mathcal{E}_x(V), \mathcal{E}_x(W))$; si $0 < \epsilon < \alpha$, existen $r, r' > 0$ tales que

$$B_\epsilon(x, r) \subset V \qquad \text{y} \qquad B_\epsilon(x, r') \subset W\,;$$

poniendo $r'' = \min(r, r')$, entonces $r'' > 0$ y

$$B_\epsilon(x, r'') \subset V \qquad \text{y} \qquad B_\epsilon(x, r'') \subset W$$

o sea

$$B_\epsilon(x, r'') \subset V \cap W$$

y

$$\mathcal{E}_x(V \cap W) \geq \epsilon\,.$$

Luego

$$\mathcal{E}_x(V \cap W) \geq \alpha\,.$$

La propiedad **(e1)** es evidente. Veamos **(e2)**. Sea $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$ y tomemos ϵ' con

$$\mathcal{E}_x(V) > \epsilon' > \epsilon\,;$$

entonces existe $r > 0$ tal que

$$B_{\epsilon'}(x, r) \subset V\,.$$

Pongamos

$$A = B_{\epsilon'}(x, r/2)\,;$$

por una parte

$$\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon' > \epsilon\,.$$

Sea $a \in A$, vamos a probar que

$$B_{\epsilon'}(a, r/2) \subset V$$

lo que demostrará que

$$\mathcal{E}_a(V) \geq \epsilon' > \epsilon\,.$$

Si $y \in B_{\epsilon'}(a, r/2)$, entonces

$$\mu_{ya}(r/2) > 1 - \epsilon'\,,$$

y como

$$\mu_{xa}(r/2) > 1 - \epsilon'$$

resulta de la propiedad **(d3)** de μ que

$$\mu_{xy}(r) > 1 - \epsilon'$$

luego

$$y \in B_{\epsilon'}(x,r) \subset V$$

lo que termina la demostración.

8.2.8 DEFINICIÓN. Sea μ una distancia sobre X; diremos que (X,μ) es un *espacio métrico.*

Consideremos los filtros $\mathcal{E}_x$ definidos en (8.2.6). Aplicando el teorema (7.2.2) resulta que existe una única t.i. normal sobre X tal que para cada $x \in X$, $\mathcal{E}_x$ es el filtro de los entornos de x. Representaremos por

$$(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$$

esta t.i. y diremos que es la *t.i. dada por la distancia* μ. Cuando hablemos del espacio métrico (X,μ) consideraremos sobre X esta t.i.

Si representamos por $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los ϵ-entornos de x para esta t.i. se tiene si $0 < \epsilon < 1$

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon^+} \leq \mathcal{V}_{x,\epsilon} \leq \mathcal{E}_{x,\epsilon}\,.$$

En general, si $\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon$, es posible que V no sea un ϵ-entorno de x. Se tiene sin embargo:

8.2.9 PROPOSICIÓN

Sea (X,μ) un espacio métrico. Sean $x \in X$, $r > 0$, $\epsilon > 0$.
La bola $B_\epsilon(x,r)$ es un ϵ-abierto.

Sea $a \in B_\epsilon(x,r)$; veamos que

$$\mathcal{E}_a(B_\epsilon(x,r)) \geq \epsilon\,.$$

En efecto,

$$\mu_{xa}(r) > 1 - \epsilon$$

y existe aún $r' < r$ tal que

$$\mu_{xa}(r') > 1 - \epsilon$$

puesto que

$$\mu_{xa}(r) = \lim_{n\to\infty} \mu_{xa}(r - 1/n) .$$

Sea

$$r'' = r - r' > 0 .$$

Veamos que

$$B_\epsilon(a, r'') \subset B_\epsilon(x, r) ;$$

en efecto, si

$$y \in B_\epsilon(a, r'') ,$$

entonces

$$\mu_{ya}(r'') > 1 - \epsilon$$

y por la propiedad **(d3)** de μ , como $r' + r'' = r$,

$$\mu_{xy}(r) > 1 - \epsilon$$

o sea

$$y \in B_\epsilon(x, r) .$$

Hemos demostrado entonces que para cada $a \in B_\epsilon(x, r)$

$$\mathcal{E}_a(B_\epsilon(x, r)) \geq \epsilon .$$

Si $\epsilon' < \epsilon$, $B_\epsilon(x, r)$ es entonces un ϵ'-entorno de cada uno de sus puntos, luego un ϵ'-abierto. Esto asegura por fin que $B_\epsilon(x, r)$ es ϵ-abierto.

8.2.10 PROPOSICIÓN

Sea d una semidistancia ordinaria sobre X y μ la distancia asociada (8.1.4). La t.i. $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ del espacio métrico (X, μ) es entonces equivalente a una topología ordinaria (forzosamente μ_1) que es justamente la topología dada por la semidistancia d .

Sea $x \in X$ y el filtro $\mathcal{E}_x$. Si

$$\mathcal{E}_x(V) > 0\,,$$

entonces

$$(\exists\, \epsilon > 0)(\exists\, r > 0) \quad B_\epsilon(x,r) \subset V\,;$$

pero como vimos en (8.2.2) esto significa que

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad B_\epsilon(x,r) \subset V\,,$$

o sea

$$\mathcal{E}_x(V) = 1\,,$$

lo que demuestra que $\mathcal{E}_x$ es un c-filtro. Del corolario (7.2.3) resulta entonces que $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es equivalente a una topología ordinaria, que es necesariamente μ_1 ,

Veamos que μ_1 es justamente la topología τ_d definida por la semidistancia d . Si V es un entorno de x para μ_1 , entonces $\mathcal{E}_x(V) = 1$ y existen $\epsilon > 0$, $r > 0$ tales que

$$B_\epsilon(x,r) \subset V\,,$$

luego

$$d(x,y) < r \quad \Rightarrow \quad y \in V$$

y V es un entorno de x para τ_d .

Recíprocamente, si V es un entorno de x para τ_d , existe $r > 0$ tal que

$$d(x,y) < r \quad \Rightarrow \quad y \in V$$

luego

$$B_1(x,r) \subset V$$

y V es un entorno de x para μ_1 .

8.2.11 No es cierto sin embargo que si (X,μ) es un espacio métrico tal que $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ sea equivalente a la topología dada por una semidistancia ordinaria, entonces μ_{xy} sea una medida de Dirac para cada $x, y \in X$. Así se ve en el sencillo ejemplo que sigue.

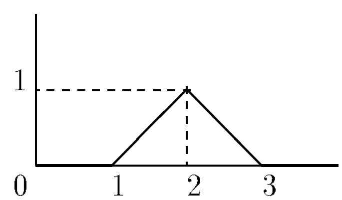
8.2.12 Ejemplo. Sea $X = \{x, y\}$ y sea μ definida por

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = \delta_0\,, \qquad \mu_{xy} = f\,,$$

en donde f es la función representada en la figura. Se prueba sin dificultad que μ es una distancia. Si $\epsilon > 0$, μ_ϵ es la topología discreta, pues para $0 < r < 1$

$$B_\epsilon(x, r) = \{x\} \qquad \text{y} \qquad B_\epsilon(y, r) = \{y\}\,.$$

$(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ es pues equivalente a la topología discreta, definida por cual-



quier distancia ordinaria sobre x , y sin embargo μ_{xy} no es una medida de Dirac.

8.2.13 PROPOSICIÓN

Sea (X, μ) un espacio métrico, $A \subset X$, $x \in X$.

a) Si $x \in d_\epsilon(A)$, para cada $\epsilon' > \epsilon$

$$(\forall\, r > 0)(\exists\, y \in A) \quad y \in B_{\epsilon'}(x, r)\,.$$

b) Si $0 < \epsilon < 1$ y

$$(\forall\, r > 0)(\exists\, y \in A) \quad y \in B_\epsilon(x, r)$$

entonces $x \in d_\epsilon(A)$.

---

a) Para cada $\epsilon' > \epsilon$, $x \in \epsilon'(A)$, luego aplicando (8.2.9)

$$(\forall\, r > 0) \quad B_{\epsilon'}(x,r) \cap A \neq \emptyset\,.$$

b) Si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, existe $r > 0$ tal que

$$B_\epsilon(x,r) \subset V$$

y como por hipótesis

$$B_\epsilon(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

resulta

$$V \cap A \neq \emptyset$$

lo que prueba (6.1.10) que $x \in d_\epsilon(A)$.

8.2.14 Ejemplo. Consideremos la distancia μ del ejemplo (8.1.5). Para $x \in X$, $r > 0$ pongamos

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}\,,$$

es decir, la bola en el sentido ordinario de centro x y radio r para la distancia d. Sean $\epsilon \in (0,1)$, $x \in X$, $r > 0$ y consideremos

$$B_\epsilon(x,r) = \{y \in X \mid \mu_{xy}(r) > 1 - \epsilon\}\,.$$

Entonces $y \in B_\epsilon(x,r)$ si y sólo si

$$d(x,y) < r \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{1 + d(x,y)} > 1 - \epsilon\,,$$

o sea, si y sólo si

$$d(x,y) < r \qquad \text{o} \qquad d(x,y) < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$$

luego

$$B_\epsilon(x,r) = B(x,r) \cup B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon})\,.$$

Para $\epsilon \in (0,1)$ y $0 < r < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ tenemos

$$B_\epsilon(x,r) = B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon})\,.$$

Cualquiera que sea $\epsilon \in (0,1)$, la bola $B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon})$ es un ϵ-abierto (8.2.9).

Sea $x \in X$ y $\mathcal{E}_x$ el filtro de los entornos de x en el espacio métrico (X, μ). Este filtro viene dado por

$$\mathcal{E}_x(V) = \sup \{\epsilon > 0 \mid B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) \subset V\}$$

cuando el conjunto de tales ϵ es no vacío y

$$\mathcal{E}_x(V) = 0$$

en caso contrario. La demostración es inmediata teniendo en cuenta lo que acabamos de ver y la definición de $\mathcal{E}_x$ dada en (8.2.6).

Consideremos la t.i. $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ del espacio métrico (X, μ). Si $x \in X$ y $\epsilon \in [0,1]$ representaremos como es habitual por $\mathcal{V}_{x,\epsilon}$ el c-filtro de los entornos de x para μ_ϵ. Entonces para $\epsilon \in (0,1)$ tenemos la equivalencia de

$$\begin{aligned} \text{(i) } & V \in \mathcal{V}_{x,\epsilon}\,; \\ \text{(ii) } & V \in \mathcal{E}_{x,\epsilon}\,; \\ \text{(iii) } & B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) \subset V\,. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) es un hecho general (5.1.2).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $V \in \mathcal{E}_{x,\epsilon}$, o sea si $\mathcal{E}_x(V) \geq \epsilon$, entonces

$$(\forall\, \epsilon' < \epsilon) \quad B(x, \frac{\epsilon'}{1-\epsilon'}) \subset V$$

y de manera inmediata

$$B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) \subset V\,.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se deduce inmediatamente de que $B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon})$ es un ϵ-abierto.

Para $\epsilon \in (0,1)$ la topología μ_ϵ viene así caracterizada por el hecho siguiente: las bolas $B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon})$ cuando x recorre X forman una base de la topología μ_ϵ.

Por fin, μ_1 es la topología grosera sobre X. En efecto, si $A \in \mu_1$ y $A \neq \emptyset$, sea $x \in A$. Como

$$(\forall\, \epsilon \in (0,1)\,) \quad B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) \subset A$$

y

$$\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \underset{\epsilon \to 1}{\longrightarrow} \infty$$

entonces si $y \in X$, tomando ϵ suficientemente grande

$$y \in B(x, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}) \subset A$$

lo que demuestra que $A = X$.

Este mismo razonamiento prueba que

$$\mathcal{E}_{x,1} = \{X\} = \mathcal{V}_{x,1}$$

y como ya habíamos probado que para $\epsilon \in (0,1)$

$$\mathcal{E}_{x,\epsilon} = \mathcal{V}_{x,\epsilon}\,,$$

resulta que (X, μ) es un e.t.i. simple (7.2.5).

8.3 Empleo de sucesiones.

8.3.1 DEFINICIÓN. Sea X un e.t.i., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X, $x \in X$. Sea $\epsilon \in [0,1]$. Diremos que x_n *ϵ-converge a x* cuando

(cs1) Para cada $V \subset X$ tal que $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow x_n \in V$$

y escribiremos entonces

$$x = \epsilon\text{-}\lim x_n \qquad \text{o} \qquad x_n \xrightarrow{\epsilon} x$$

diciendo que x es un *ϵ-límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como siempre, para $\epsilon = 0$, diremos que x_n *converge a x* o que x es un *límite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribiremos

$$x = \lim x_n \qquad \text{o} \qquad x_n \to x\,.$$

Si $\mathcal{F}_{(x_n)}$ es el c-filtro sobre X asociado a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la propiedad **(cs1)** equivale a

(cs2) $\mathcal{F}_{(x_n)} \overset{\epsilon}{\to} x$.

8.3.2 Si X es un espacio topológico ordinario, la convergencia

$$x_n \overset{\epsilon}{\to} x$$

equivale, cualquiera que sea $\epsilon < 1$, a la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia x en el sentido habitual.

8.3.3 Ejemplo. Sea (X, μ) el espacio métrico de (8.2.14); sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $x \in X$. Si $\epsilon \in [0, 1)$ son equivalentes

(i) $x_n \overset{\epsilon}{\to} x$;

(ii) Para cada $r > \dfrac{\epsilon}{1-\epsilon}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n\, x) > r\,,$$

siendo inmediata la demostración de esta equivalencia. Para $\epsilon = 0$ esta equivalencia significa en particular la equivalencia de

(i) $x_n \to x$ en el espacio métrico (X, μ) ;

(ii) $x_n \to x$ en el espacio métrico ordinario (X, d) .

8.3.4 PROPOSICIÓN

Sean (X, μ) , (Y, θ) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$, $b \in Y$. Son equivalentes

(i) $\epsilon\text{-}\lim_{x\to a} f(x) = b$;

(ii) $\epsilon' \geq \epsilon$ y $x_n \overset{\epsilon'}{\to} a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \overset{\epsilon'}{\to} b$;

(iii) $\epsilon' > \epsilon$ y $x_n \overset{\epsilon'}{\to} a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \overset{\epsilon'}{\to} b$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos (i) cierto y sea $\epsilon' \geq \epsilon$ y $x_n \xrightarrow{\epsilon'} a$. Como entonces

$$\epsilon'\text{-}\lim_{x \to a} f(x) = b$$

resulta de (5.2.20) que

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon'} a \quad \Rightarrow \quad f\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon'} b\,,$$

y como en particular

$$\mathcal{F}_{(x_n)} \xrightarrow{\epsilon'} a$$

entonces

$$f\mathcal{F}_{(x_n)} \xrightarrow{\epsilon'} b\,,$$

luego

$$\mathcal{F}_{(f(x_n))} \xrightarrow{\epsilon'} b$$

puesto que

$$f\mathcal{F}_{(x_n)} = \mathcal{F}_{(f(x_n))}\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) es evidente.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Razonemos por reducción al absurdo suponiendo falso que

$$\epsilon\text{-}\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$

Entonces existen $\epsilon' > \epsilon$ y $V \subset Y$ tales que

$$\mathcal{E}_b(V) = \epsilon' \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) < \epsilon'\,.$$

Sea ϵ'' tal que $\epsilon' > \epsilon'' > \epsilon$ y $\mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) < \epsilon''$. Ahora tenemos

$$\mathcal{E}_b(V) > \epsilon'' \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_a(f^{-1}(V)) < \epsilon''\,,$$

luego

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad B_{\epsilon''}\left(a, \frac{1}{n}\right) \not\subset f^{-1}(V)\,,$$

o sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$x_n \in B_{\epsilon''}\left(a, \frac{1}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad f(x_n) \notin V\,.$$

Como $\mathcal{E}_b(V) > \epsilon''$, es claro que la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no es ϵ''-convergente hacia b. Sin embargo

$$x_n \xrightarrow{\epsilon''} a$$

pues cuando $\mathcal{E}_a(W) > \epsilon''$, existe $r > 0$ con

$$B_{\epsilon''}(a, r) \subset W\,,$$

y para $1/n \leq r$ se tiene $x_n \in B_{\epsilon''}(a, r) \subset W$. Luego (iii) es falso.

8.3.5 COROLARIO

Sean (X, μ), (Y, θ) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una aplicación, $a \in X$. Son equivalentes

(i) f es ϵ-continua en a;

(ii) $\epsilon' > \epsilon$ y $x_n \xrightarrow{\epsilon'} a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{\epsilon'} f(a)$.

8.3.6 COROLARIO

Sean (X, μ), (Y, θ) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una aplicación. Son equivalentes

(i) f es ϵ-continua;

(ii) $\epsilon' > \epsilon$ y $x_n \xrightarrow{\epsilon'} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{\epsilon'} f(x)$.

8.3.7 Sean μ, θ dos distancias sobre X. Los símbolos

$$\theta\,(\leq \epsilon)\,\mu\,, \quad \theta \leq \mu\,, \quad \theta\,(\simeq \epsilon)\,\mu\,, \quad \theta \simeq \mu$$

significarán que la misma relación existe entre las correspondientes t.i. normales $(\theta_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ y $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$.

8.3.8 COROLARIO

Sean μ, θ dos distancias sobre X. Entonces $\theta\,(\leq \epsilon)\,\mu$ si y sólo si para cada $\epsilon' > \epsilon$ y cada sucesión ϵ'-convergente por μ, la sucesión ϵ'-converge para θ hacia el mismo límite.

8.3.9 Son ciertos asimismo corolarios análogos para las otras tres relaciones.

8.3.10 Ejemplo. Sea X un conjunto, d una distancia ordinaria ultramétrica sobre X. Sea μ la distancia sobre X dada por

$$\mu_{xy} = \frac{1}{1+d(x,y)}\,\delta_0 + \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\,\delta_{d(x,y)}$$

como en el ejemplo (8.1.5) y consideremos el espacio métrico (X,μ) cuya t.i. $(\mu_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ estudiamos en el ejemplo (8.2.14). Sobre X vamos a considerar también la distancia θ dada para cada $x, y \in X$ por

$$\theta_{xy} = \delta_{d(x,y)}\,,$$

distancia cuyo estudio abordamos en (8.1.4). Como vimos en (8.2.10) la correspondiente t.i. normal $(\theta_\epsilon)_{\epsilon\in[0,1]}$ del espacio métrico (X,θ) es equivalente a la topología ordinaria dada por d, o sea

$$(\forall\, \epsilon > 0) \quad \theta_\epsilon = \theta_1$$

y θ_1 es la topología ordinaria dada por d.

Veamos la relación existente entre μ y θ. Si $\epsilon > 0$ y $x_n \xrightarrow{\epsilon} x$ para θ, entonces (8.3.2) $x_n \to x$ en el espacio métrico ordinario (X, d), luego aplicando (8.3.3), $x_n \to x$ para μ y trivialmente $x_n \xrightarrow{\epsilon} x$ para μ. De (8.3.8) y (8.3.9) se deduce entonces que

$$\mu \leq \theta .$$

8.3.11 PROPOSICIÓN

Sea (X, μ) un espacio métrico, $A \subset X$, $x \in X$. $x \in d_\epsilon(A)$ si y sólo si existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$a_n \xrightarrow{\epsilon} x .$$

Supongamos que $x \in d_\epsilon(A)$; entonces por (8.2.13):

$$(\forall\, \epsilon' > \epsilon)(\forall\, r > 0)(\exists\, y \in A) \quad y \in B_{\epsilon'}(x, r) ,$$

y en particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ (desde que $\epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$) existe $a_n \in A$ tal que

$$a_n \in B_{\epsilon + \frac{1}{n}} \left(x, \frac{1}{n} \right) .$$

Entonces

$$a_n \xrightarrow{\epsilon} x$$

pues si $\mathcal{E}_x(V) > \epsilon$, existen $\epsilon' > \epsilon$ y $r > 0$ tales que

$$B_{\epsilon'}(x, r) \subset V ,$$

luego $a_n \in V$ para

$$\epsilon + \frac{1}{n} \leq \epsilon' \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{n} \leq r .$$

Recíprocamente, supongamos que existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$a_n \xrightarrow{\epsilon} x ;$$

entonces

$$\mathcal{F}_{(a_n)} \xrightarrow{\epsilon} x ,$$

y como $\mathcal{F}_{(a_n)}(A) = 1$, resulta de (6.1.11) que $x \in d_\epsilon(A)$.

8.3.12 Ejemplo. Consideremos el espacio métrico (X, μ) del ejemplo (8.2.14), construído a partir de la distancia ordinaria ultramétrica d. Si $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ y $x \in X$ recordemos la notación clásica

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) .$$

Si $\epsilon < 1$, se tiene entonces la equivalencia de

$$\text{(i) } x \in d_\epsilon(A) ;$$
$$\text{(ii) } d(x, A) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} .$$

En efecto, si $x \in d_\epsilon(A)$, existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n \xrightarrow{\epsilon} x$, y utilizando (8.3.3) resulta que para cada $r > \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a_n , x) < r ,$$

lo que demuestra que

$$d(x, A) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} .$$

Recíprocamente, si $d(x, A) \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que

$$d(a_n , x) < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1}{n}$$

y aplicando de nuevo (8.3.3) resulta que

$$a_n \xrightarrow{\epsilon} x$$

luego $x \in d_\epsilon(A)$ por la proposición precedente.

8.3.13 TEOREMA

> Sea (X, μ) un espacio métrico, $A \subset X$, $\epsilon < 1$. A es ϵ-compacto si y sólo si cada sucesión de A admite una subsucesión ϵ-convergente hacia algún punto de A.

La t.i. $(\mu_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ es accesible y aplicaremos (6.4.6).

a) Supongamos en primer lugar que A es ϵ-compacto. Sea entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X tal que

$$\mathcal{F}_{(a_n)} \leq \mathcal{U}\,.$$

En particular $\mathcal{U}(A) = 1$, luego existe $a \in A$ tal que

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\epsilon} a\,.$$

Para $i \in \mathbb{N}$ (y siempre que $\epsilon + \frac{1}{i} \leq 1$)

$$\mathcal{U}\left(B_{\epsilon+\frac{1}{i}}\left(a,\, \frac{1}{i}\right)\right) = 1\,,$$

y como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{U}(\{a_n\,, a_{n+1}\,, \ldots\}) = 1\,,$$

entonces, si $i, n \in \mathbb{N}$

$$B_{\epsilon+\frac{1}{i}}\left(a,\, \frac{1}{i}\right) \bigcap \{a_n\,, a_{n+1}\,, \ldots\} \neq \emptyset\,,$$

luego para cada $i \in \mathbb{N}$, existe n_i tan grande como queramos tal que

$$a_{n_i} \in B_{\epsilon+\frac{1}{i}}\left(a,\, \frac{1}{i}\right)$$

y podemos hacer que n_i sea estrictamente creciente. Es entonces inmediato demostrar que

$$a_{n_i} \xrightarrow{\epsilon} a\,.$$

b) Recíprocamente, vamos a suponer que cada sucesión de A admite una subsucesión ϵ-convergente hacia algún punto de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$ consideremos el recubrimiento de A

$$\left(B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\, \frac{1}{n}\right)\right)_{a\in A}\,.$$

Vamos a probar que este recubrimiento admite un subrecubrimiento finito de A. Si suponemos lo contrario, consideremos la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A definida por recurrencia de la forma siguiente

- a_1 es un punto cualquiera de A,

- a_{i+1} es un punto de A que no pertenece a

$$B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a_1\,,\,\frac{1}{n}\right)\bigcup\cdots\bigcup B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a_i\,,\,\frac{1}{n}\right)\,.$$

La sucesión de A, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, no admite ninguna subsucesión $(a_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ϵ-convergente a un punto $a\in A$, pues si

$$a_{i_j}\xrightarrow{\epsilon} a\in A\,,$$

como

$$\mathcal{E}_a\left(B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\,\frac{1}{2n}\right)\right)>\epsilon\,,$$

existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$j\geq j_0\quad\Rightarrow\quad a_{i_j}\in B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\,\frac{1}{2n}\right)$$

y en particular, si $j\geq j_0$,

$$a_{i_j}\in B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\,\frac{1}{2n}\right)\qquad\text{y}\qquad a_{i_{j+1}}\in B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\,\frac{1}{2n}\right)\,,$$

luego por la propiedad **(d3)** de μ

$$a_{i_{j+1}}\in B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a_{i_j}\,,\,\frac{1}{n}\right)\,,$$

lo que va en contra de la definición de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Resulta entonces que para cada $n\in\mathbb{N}$ con $\epsilon+\frac{1}{n}\leq 1$, A puede recubrirse con un número finito de bolas

$$B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a,\,\frac{1}{n}\right)$$

con centro en puntos de A.

Pasemos a demostrar que A es ϵ-compacto. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{U}(A)=1$; bastará probar que existe $a\in A$ tal que

$$\mathcal{U}\xrightarrow{\epsilon} a\,.$$

Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre y $\mathcal{U}(A) = 1$, entonces por la propiedad que acabamos de ver, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $\epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$ existe $a_n \in A$ tal que

$$\mathcal{U}\left(B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(a_n\,,\,\frac{1}{n}\right)\right) = 1\,.$$

Por hipótesis, existe una subsucesión $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ y $a \in A$ tal que

$$a_{n_i} \overset{\epsilon}{\to} a\,.$$

Veamos que

$$\mathcal{U} \overset{\epsilon}{\to} a\,.$$

Si $\mathcal{E}_a(V) > \epsilon$, existen $\epsilon' > \epsilon$, $r > 0$ tales que

$$B_{\epsilon'}(a,r) \subset V\,;$$

existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq i_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n_i} \in B_{\epsilon'}\left(a, \frac{r}{2}\right)\,,$$

luego tomando $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$i \geq i_0\,, \qquad \epsilon + \frac{1}{n_i} \leq \epsilon'\,, \qquad \frac{1}{n_i} \leq \frac{r}{2}$$

se tiene por la propiedad **(d3)** de μ

$$B_{\epsilon+\frac{1}{n_i}}\left(a_{n_i}\,,\,\frac{1}{n_i}\right) \subset B_{\epsilon'}(a,r) \subset V$$

y $\mathcal{U}(V) = 1$, lo que termina la demostración del teorema.

8.3.14 COROLARIO

Sea (X,μ) un espacio métrico, $\epsilon < 1$. X es ϵ-compacto si y sólo si cada sucesión de X admite una subsucesión ϵ-convergente.

8.3.15 LEMA

Sea (X,μ) un espacio métrico, $\epsilon < 1$. X es ϵ-separado si y sólo si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $\epsilon' > \epsilon$ y $r > 0$ con
$$B_{\epsilon'}(x,r) \cap B_{\epsilon'}(y,r) = \emptyset .$$

8.3.16 PROPOSICIÓN

Sea (X,μ) un espacio métrico. Supongamos que para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $r > 0$ tal que
$$z \in X \quad \Rightarrow \quad \mu_{xz}(r) = 0 \quad \text{o} \quad \mu_{yz}(r) = 0 .$$
Entonces, X es separado.

En efecto, la condición significa que
$$B_1(x,r) \cap B_1(y,r) = \emptyset$$
y por el lema precedente, X es ϵ-separado cualquiera que sea $\epsilon < 1$.

8.3.17 PROPOSICIÓN

Sea (X,μ) un espacio métrico, $\epsilon < 1$. Son equivalentes

(i) X es ϵ-separado;

(ii) Cada sucesión de X posee a lo sumo un ϵ-límite.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos X ϵ-separado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que
$$x_n \overset{\epsilon}{\to} x \qquad \text{y} \qquad x_n \overset{\epsilon}{\to} y ;$$
entonces
$$(\forall\, \epsilon' > \epsilon)(\forall\, r > 0) \quad B_{\epsilon'}(x,r) \cap B_{\epsilon'}(y,r) \neq \emptyset ,$$
y por el lema (8.3.15), necesariamente $x = y$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que X no es ϵ-separado. Aplicando (8.3.15), existen $x, y \in X$, $x \neq y$, tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$ (con $\epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$)

$$B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(x, \frac{1}{n}\right) \bigcap B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(y, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset .$$

Si para cada n tomamos

$$x_n \in B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(x, \frac{1}{n}\right) \bigcap B_{\epsilon+\frac{1}{n}}\left(y, \frac{1}{n}\right)$$

de forma evidente

$$x_n \xrightarrow{\epsilon} x \qquad \text{y} \qquad x_n \xrightarrow{\epsilon} y \, .$$

Símbolos y propiedades.

Símbolos

(Salvo excepciones, mencionamos sólo los símbolos específicos de esta teoría)

Propiedades

Índice

Ilmo. Sr.:

Cumplimentando lo señalado en el apartado 7^0 del Decreto de 25 de junio de 1954, que regula el procedimiento para la concesión del Grado de Doctor,

ESTE RECTORADO, ha tenido a bien aprobar la propuesta de Tribunal que juzgará en esta Facultad la Tesis Doctoral presentada por Don Jesús Rojo García, titulada "Espacios Topológicos Imprecisos", en la forma siguiente:

Presidente.- Dr. D. Juan José Gutiérrez Suárez, Catedrático de la U. de Valladolid
Vocales.- Dr. D. Miguel Martín Díaz, Catedrático de la U. de Valladolid
Dr. D. Antonio Pérez Gómez, Catedrático de la U. de Valladolid
Dr. D. Pedro Pérez Carreras, Catedrático de la U. Politécnica de Valencia
Secretario.- Dr. D. Tomás Sánchez Giralda, Catedrático de la U. de Valladolid
Suplente.- Dr. D. Félix López Fernández Asenjo, Adjunto de la U. de Valladolid

Dios guarde a V.I.
Valladolid, 26 de junio de 1981.
EL RECTOR

Ilmo. Sr. Decano de la Facultad de Ciencias de esta Universidad.

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID FACULTAD DE CIENCIAS
Sección de MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha acordó otorgar por UNANIMIDAD a esta Tesis doctoral de D. JESUS ROJO GARCIA la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE.

Valladolid, a 9 de julio de 1981.

El Presidente, El Secretario,

Expediente personal del interesado

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

ACTA DEL GRADO DE DOCTOR

CURSO de 1980 a 1981 Folio......... Núm.........

Don JESUS ROJO GARCIA

Reunido en el día de la fecha el Tribunal examinador nombrado por el Ilmo. Sr. Decano de la Facultad, y constituído por los jueces que suscriben la presente acta, el aspirante leyó su Memoria doctoral que había escrito libremente, bajo la dirección de Don ANTONIO PEREZ GOMEZ sobre el siguiente tema ESPACIOS TOPOLOGICOS IMPRECISOS.
Terminada la lectura y contestadas por el alumno las objecciones formuladas por los señores jueces del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Valladolid, 4 de julio de 1981.

El Presidente, El Secretario del Tribunal,

El Vocal, El Vocal,

Firma del Alumno, El Vocal,

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría

La presente Tesis Doctoral queda registrada
en el folio n^0 157 del correspondiente
libro de Registro, con el n^0 285.

Valladolid, 4 de julio de 1981.

EL ENCARGADO DE REGISTRO,