(Preprint for)

M. Núñez y J. Rojo

Situaciones y métricas aleatorias

pp. 775-778 in
IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Salamanca, 1982

ACTAS DE LAS

IX JORNADAS MATEMATICAS HISPANO - LUSAS

(2)

EDICIONES UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

EXCELENTISIMA DIPUTACION PROVINCIAL DE SALAMANCA

AÑO 1982

Actas IX Jornadas Matemáticas
Hispano-Lusas, Vol. II
Universidad de Salamanca, 1982

SITUACIONES Y METRICAS ALEATORIAS

Jesús Rojo García

E.T.S. de Ingenieros Industriales. Sección de Matemáticas.

Universidad de Valladolid.

Manuel Núñez Jiménez

Depto. de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias (Valladolid)

Abstract: We assign to every point of a set X a Radon measure s_x on R^n, considering that it describes in a diffuse way the location of x. We define a random metric F on X, which is shown to verify the next theorem: let (x_n) be a nonconstant sequence converging with ε -level of security to x. Then there exists z in R^n such that $s_x(\{z\}) \geq 1-\varepsilon$. Moreover, if $\varepsilon < 1/2$, z is unique, and for every $r > 0$, $\liminf s_{x_n}(B(z,r)) \geq 1-\varepsilon$. Hence, if that is true for every ε, s_x must be a Dirac measure.

Introducción: Para la definición de distancia aleatoria y sus motivaciones, nos remitimos a las referencias [1], [2] y [3] .
Lo que pretendemos en la presente nota es estudiar las distancias generadas por un desconocimiento de la situación exacta de los puntos de un conjunto X. Dicha ambigüedad viene descrita del siguiente modo:

Definición 1 Sea $M_1^+(R^n)$ el conjunto de las medidas de Radon positivas de masa 1 en R^n. Una situación de un conjunto X es una aplicación s de X en $M_1^+(R^n)$.

Definición 2 Sea s una situación de X. Denotemos por d el diámetro en R^n. Definimos, para $x, y \in X$, $x \neq y$, $r>0$,

$F_{xy}[0,r) = \sup\{\varepsilon > 0 \ / \ \exists z_0=x, z_1,\ldots z_p=y, z_i \varepsilon X$ y conjuntos Borel $A_1,\ldots A_p$ en R^n tales que $\Sigma\, d(A_i) < r$, $s_{z_i}(A_i) \geq \varepsilon \leq s_{z_i}(A_{i+1})\}$

$F_{xx}[0,r) = 1$.

Es decir, la probabilidad de que x e y disten menos que r es mayor que ε si podemos pasar de x a y por medio de una cadena de diámetro menor que r, en la que haya puntos de X con probabilidad al menos ε .

<u>Proposición 1</u> Cuando $\varepsilon > 1/2$, F_{xy} $0,r) \geq \varepsilon$ si y sólo si existe un conjunto Borel A de diámetro menor que r tal que $s_x(A) > \varepsilon$, $s_y(A) > \varepsilon$

<u>Demostración:</u> Es inmediata, ya que por ser de masa total 1 ha de ser $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$.

<u>Proposición 2</u> F_{xy} es una métrica aleatoria.

<u>Demostración:</u> Obviamente la aplicación $r \rightarrow F_{xy}[0,r)$ es creciente (luego de variación acotada) y continua por la izquierda.

Las propiedades (1) y (2) de [1] son inmediatas; la (3) se deduce de una concatenación de cadenas de borelianos.

<u>Ejemplo:</u> Si $X = R^n$, y $s_x = \delta_x$ (medida de Dirac), F_{xy} es la medida de Dirac centrada en $|x-y|$.

La comprobación es inmediata. Así pues, en el caso de que la situación de los puntos tenga una precisión total, la métrica aleatoria se reduce a la ordinaria.

<u>Proposición 3</u> Sea $\varepsilon \epsilon [0,1]$, (x_n) una sucesión de X con una cantidad infinita de términos diferentes de $x \varepsilon X$. Supongamos que $x_n \overset{\varepsilon}{\rightarrow} x$. ([1]). Entonces $\exists\, a \varepsilon R^n \ / \ s_x(\{a\}) \geq 1-\varepsilon$.

<u>Demostración:</u> En el caso no trivial, se toma t comprendido entre 0 y $1-\varepsilon$. A partir de un índice ha de verificarse $F_{xx_n}[0,r) > t$, por lo que existe un boreliano A_r con $d(A_r) < r$ y $s_x(A_r) > t$.

Tomando ahora los $r=1/2^n$, se construye una sucesión decreciente de borelianos (B_n) cuyo diámetro tiende a cero y tales que $s_x(B_n) > t$. Su intersección ha de reducirse a un punto, el cual, por las propiedades de las medidas de Radon, verificará las condiciones del enunciado.

Corolario Bajo las hipótesis de la proposición precedente, si $\varepsilon < 1/2$, a es único y para cada disco D centrado en a , se cumple $\liminf s_{x_n}(D) \geq 1-\varepsilon$.

Demostración: En este caso, forzosamente a ha de estar en los A_r a partir de un lugar; cuando el diámetro de éstos es lo bastante pequeño, estarán contenidos en el disco D.

Proposición 4 Sea $\varepsilon \in [0,1]$. $(x_n) \subset X$, $x \in X$ tales que

(1) $\exists a \in R^n \;/\; s_x(\{a\}) \geq 1-\varepsilon$

(2) Para cada disco D centrado en a, se verifica $\liminf s_{x_n}(D) \geq 1-\varepsilon$.

Entonces $x_n \overset{\varepsilon}{\to} x$.

Demostración: Tomando un disco D de diámetro lo bastante pequeño podemos lograr, para cada r positivo, $d(D) < r$, $s_x(D) > t$, $s_{x_n}(D) > t$ para cada $t < 1-\varepsilon$. Esto es, $F_{xx_n}[0,r) > t$, lo cual equivale al enunciado.

Corolario Sea $(x_n) \subset X$, $x \in X$ tales que hay una cantidad infinita de términos distintos de x. Entonces x_n converge absolutamente a x (es decir, converge para todo nivel de seguridad ε) si y sólo si

(1) $s_x = \delta_a$ para algún $a \in R^n$.

(2) Para cada disco D centrado en a, $\lim s_{x_n}(D) = 1$.

Demostración: Inmediata. Nótese que para que la sucesión converja con absoluta seguridad, el punto límite no ha de admitir ninguna ambigüedad en su colocación.

REFERENCIAS

[1] Jesús Rojo García: Espacios topológicos imprecisos. Tesis doctoral. Valladolid ,1981 (pendiente de publicación)

[2] K. Menger, B. Schweizer, A. Sklar: On probabilistic and numerical metrics with probability 1. Czechoslovak Math. Journal, 9(84), pp. 459-466 (1959)

[3] B. Schweizer, A. Sklar: Statistical metric spaces. Pacific J. Math. Vol. 10, pp. 313-334 (1960)

[4] M.J. Frank: Probabilistic Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 34,pp. 67-81 (1971)

[5] B. Schweizer: Multiplications on the Space of Probability Distribution Functions. Aequationes Math. 12, pp. 156-182 (1975)

[6] J. Rojo García: Topologías imprecisas dadas por métricas aleatorias. IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, 1982 (Salamanca)