

(Preprint for)

S.NOVO Y J. ROJO

Sobre el espectro continuo de las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

pp. 495-499 in

I Congreso de Matemática Aplicada / XI CEDYA,

Fuengirola, Málaga, Septiembre 1989

SOBRE EL ESPECTRO CONTINUO DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINAMICA

Sylvia Novo y Jesús Rojo

Departamento de Matemática Aplicada a la Técnica
E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid
47011 Valladolid

Resumen

The spectrum of the linearized Magnetohydrodynamics equations plays an important role in the study of plasma configurations. In this paper we develop a theoretical and computational method to find the Alfvén frequencies of the Shafranov-Solovév equilibrium. A comparison is made between the actually computed eigenvalues and those obtained from the WKB approximation, which is shown to fail for the lower frequencies. Our method, with obvious modifications, may be applied to all toroidal axisymmetric equilibria.

Clasificación A.M.S. (1985) : 76W05, 41A60.

1 Introducción

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica linealizadas en torno a un estado de equilibrio dado por el campo \mathbf{B} , la presión p y la densidad ρ forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo mixto elíptico-hiperbólico

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla p_* - i\omega \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma p} (\mathbf{u} \cdot \nabla p) \mathbf{B} - i\omega \left[\mathbf{b} + \frac{1}{\gamma p} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{B} - \frac{1}{\gamma p} p_* \mathbf{B} \right] &= 0 \quad (1) \\ \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p - (\gamma p + \mathbf{B}^2) \operatorname{div} \mathbf{u} - i\omega p_* &= 0 \end{aligned}$$

El espectro esencial ([9]) del operador asociado a este sistema es fundamental para determinar la estabilidad de la configuración de equilibrio ([1],[2]) inicial. Las configuraciones cuyo objetivo sea confinar el plasma incluso a temperaturas de fusión deben poseer buenas condiciones de estabilidad.



Figura 1: Distribución de las superficies S_ψ y de las líneas del campo en cada una de ellas.

El tipo más apropiado de confinamiento toroidal del plasma se obtiene mediante campos magnéticos que configuran el plasma en una familia $(S_\psi)_\psi$ de superficies anidadas unas

en otras, de manera que las líneas del campo están contenidas en dichas superficies. Si suponemos que las líneas del campo cubren ergódicamente las superficies, la presión $p = p(\psi)$ es constante en cada superficie. En el caso toroidal axisimétrico, los posibles perfiles de equilibrio $\psi = \psi(R, y)$ (donde R, ϕ, y son las coordenadas cilíndricas relativas al eje de simetría) no dependen del ángulo toroidal, ϕ , y vienen caracterizados por la ecuación de Grad-Shafranov ([6])

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \left(R^2 \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} \right) \quad (2)$$

En el presente estudio hemos considerado el equilibrio de Shafranov-Solovev

$$\psi = R^2 - y^2 - (1 - R^2)^2 \quad (3)$$

considerado como representativo de las configuraciones toroidales.



Figura 2: Corte con $\phi = \text{cte}$ de las superficies del equilibrio de Shafranov-Solovev.

Está probado ([1]) que, fijado un modo de Fourier, m , en el ángulo toroidal y excluyendo el eje magnético, el espectro esencial de (1) consiste en $\omega = 0$ y en los autovalores de la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{B}] &= i \omega \rho \mathbf{u} \\ \mathbf{P}[\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}] &= i \omega [\mathbf{b} + \frac{1}{\gamma p} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (4)$$

para todas las superficies de flujo, donde \mathbf{P} representa la proyección que aniquila la componente normal a la superficie S_ψ . Los autovalores de (4) son justamente lo que se conoce como frecuencias de Alfvén.

En la actualidad se ha propuesto el calentamiento del plasma hasta temperaturas que permitan la fusión nuclear mediante ondas electromagnéticas de las frecuencias bajas de Alfvén ([3],[4]). Se trata de hacer que ciertas superficies absorban la energía de ondas electromagnéticas con cuya frecuencia son resonantes. Esta resonancia es también la causa de las perturbaciones de corto período de la magnetosfera terrestre ([5]).

2 El espectro de Alfvén para la configuración de Shafranov-Solovev

Para la configuración de Shafranov-Solovev, (3), la ecuación (4) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias ([7])

$$\mathbf{x}' = \left(\begin{bmatrix} -T & \frac{4K}{\sqrt{H}} & 0 & 0 \\ \frac{2K(1-R)}{R\sqrt{H}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2K(1+R)}{R\sqrt{H}} & 1 \end{bmatrix} + i \frac{Km}{F} I - i \omega \frac{R}{2F} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \\ 1 + \frac{H}{\gamma p R^2} & \frac{2K\sqrt{H}}{\gamma p R^2} & 0 & 0 \\ \frac{2K\sqrt{H}}{\gamma p R^2} & 1 + \frac{2}{5R^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x},$$

o, abreviadamente,

$$\mathbf{x}' = A(R, \psi)\mathbf{x} + imC(R, \psi)\mathbf{x} + i\omega B(R, \psi)\mathbf{x}, \quad (5)$$

donde

$$\mathbf{x}(R) = \begin{bmatrix} b_v(R) \\ b_\phi(R) \\ u_v(R) \\ u_\phi(R) \end{bmatrix}$$

$$F(R, \psi) = y(R, \psi) = \sqrt{R^2 - (1 - R^2)^2 - \psi}$$

$$G(R) = R(6 - 4R^2)$$

$$H(R, \psi) = 4F^2 + G^2 = 4(4R^6 - 13R^4 + 12R^2 - \psi - 1)$$

$$T(R, \psi) = \frac{4(8R^6 - 13R^4 + \psi + 1)}{RH}$$

$$K(\psi) = \frac{I(\psi)}{2} = \sqrt{\psi + 1}$$

Aquí, la frecuencia ω , el modo m de Fourier para el ángulo toroidal y la superficie ψ aparecen como parámetros. Lo que se busca son los valores de ω para los que (5) admite soluciones no triviales en $[R_1, R_2]$ para las partes superior e inferior de la superficie que formen una solución periódica sobre la superficie. O sea, si denotamos por $\mathbf{x}' = M_1\mathbf{x}$ el sistema (5) y por $\mathbf{x}' = M_2\mathbf{x}$ el sistema (5) sustituyendo F por $-F$ (es decir, el correspondiente a la parte inferior de la superficie), y si $\Phi_1(R, \omega)$ y $\Phi_2(R, \omega)$ representan matrices fundamentales principales en R_1 de dichos sistemas, lo que debe ocurrir es que exista $\mathbf{x}_0 \neq 0$ tal que $\Phi_1(R_2, \omega)\mathbf{x}_0 = \Phi_2(R_2, \omega)\mathbf{x}_0$. Esto equivale a que

$$\det(\Phi_1(R_2, \omega) - \Phi_2(R_2, \omega)) = 0$$

Las frecuencias buscadas son pues los ceros de dicha función o, equivalentemente, de la función

$$\omega \longrightarrow \det(\text{Im } \Phi_1(R_2, \omega)), \quad (6)$$

como es fácil comprobar ([7]). Es posible limitar la búsqueda de los ceros a ω real, puesto que, para la configuración estudiada, las frecuencias de Alfvén son reales ([8]).

3 Comparación con la aproximación de la óptica geométrica

Como es sabido, ([10]), para valores grandes de ω se puede buscar una solución aproximada de la ecuación (5) de la forma

$$e^{im\phi + i\omega t + \theta(R)} \mathbf{g}(R)$$

cuya diferencia con la solución real es de orden $1/\omega$. El valor de la fase $\theta(R)$ viene determinado por la ecuación eikonal

$$\det(i\omega B + imC - I \frac{d\theta}{dR}) = 0$$

Esto significa que $d\theta/dR$ es un autovalor de la matriz

$$i\omega B(R, \psi) + imC(R, \psi)$$

y, dado que $C(R, \psi)$ es de la forma $\frac{K}{F}I$, los posibles valores de $\theta(R)$ son

$$i\omega \int_{R_1}^R \lambda_j(R) dR + im \int_{R_1}^R \frac{K}{F(R)} dR, \quad j = 1, \dots, 4$$

siendo $\lambda_1(R), \dots, \lambda_4(R)$ los autovalores de $B(R, \psi)$. Ahora bien, la fase $\theta(R)$ debe corresponder a una función bien definida en la superficie ψ luego el valor que toma la función e^θ en R_2 no tiene que cambiar al sustituir F (correspondiente al camino superior de la superficie) por $-F$ (correspondiente al camino inferior). Como con dicho cambio B pasa a $-B$ y C a $-C$ debe verificarse que

$$e^{\theta(R_2)} = e^{-\theta(R_2)},$$

de donde se deduce que los ω buscados son las raíces de la ecuación

$$\prod_{i=1}^4 \text{sen} \left(\omega \int_{R_1}^{R_2} \lambda_i(R) dR + \int_{R_1}^{R_2} \frac{mK}{F(R)} dR \right) = 0. \quad (7)$$

En nuestro caso

$$\lambda_1(R) = -\lambda_2(R) = \frac{R\sqrt{\rho}}{2F(R)}$$

$$\lambda_3(R) = -\lambda_4(R) = \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{H(R) + 4K^2 + \gamma p R^2}}{2\sqrt{\gamma p} F(R)}$$

Como muestra la figura 3, este método produce resultados satisfactorios para valores grandes de ω . En dicha figura se han superpuesto las gráficas de la función (6) y de la función que aparece en la ecuación (7), en el caso particular de $m = 0$, $\psi = 0$ (correspondiente a una superficie intermedia, lejos de la separatriz y del eje magnético) y valores de ω comprendidos entre 100 y 104.

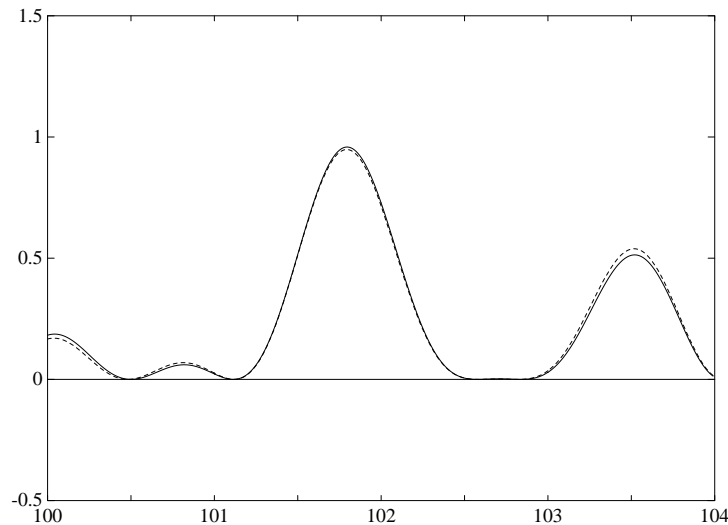


Figura 3: La curva discontinua corresponde a la aproximación WKB.

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, las frecuencias más importantes son las más bajas y aquí es donde las discrepancias son grandes. En la figura 4 se han superpuesto

las mismas gráficas que en la figura anterior pero ahora para valores de ω comprendidos entre 0 y 8.

Los resultados numéricos han sido obtenidos en un CYBER 930, con NOS/VE FORTRAN (doble precisión de 16 bytes).

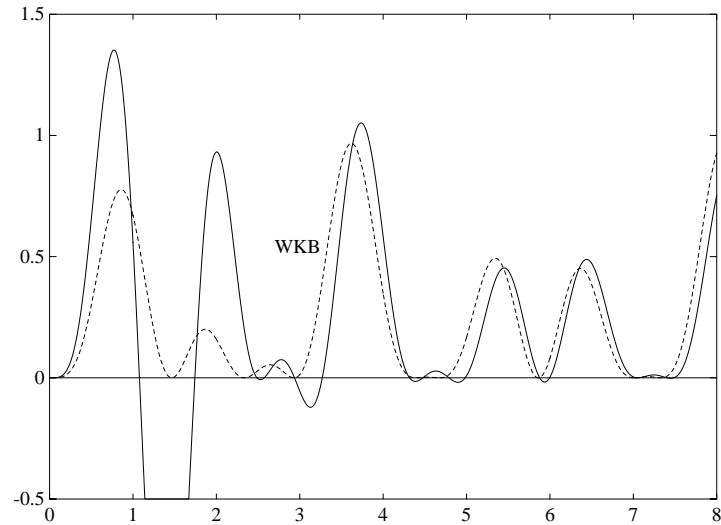


Figura 4: La curva discontinua corresponde a la aproximación WKB.

Referencias

- [1] Hameiri, E.: On the essential spectrum of ideal Magnetohydrodynamics. *Comm. in Pure and Applied Math.* **38**, 43-66 (1985).
- [2] Freidberg, J.P.: Ideal Magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems. *Rev. of Modern Phys.* **54**, 801-902 (1982).
- [3] Chen, L., Hasegawa, A.: Plasma heating by spatial resonance of Alfvén wave. *Phys. of Fluids* **17**, 1399-1403 (1974).
- [4] Tataronis, J.: RF Energy absorption due to the continuous spectrum of ideal Magnetohydrodynamics. *Courant Institute Report* (1974).
- [5] Kivelson, M.G., Southwood, D.J.: Coupling of global magnetospheric MHD eigenmodes to field line resonance. *J. of Geoph. Res.* **91**, p. 4345 (1986).
- [6] Bateman, G.: *MHD Instabilities*. The MIT Press (1980).
- [7] Novo, S., Núñez, M., Rojo, J.: Alfvén resonance in the Shafranov equilibrium. Preprint (1989).
- [8] Goedbloed, J.P.: Spectrum of ideal magnetohydrodynamics of axisymmetric toroidal systems. *Phys. of Fluids* **18**, 1258-1268 (1975).
- [9] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer (1976).
- [10] Courant R., Hilbert D.: *Methods of Mathematical Physics (II)* . Wiley & Sons (1962).