

(Contents of)

S. NOVO, R. OBAYA Y J. ROJO
Ecuaciones y sistemas diferenciales
Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1995
539 pp.

Ecuaciones y sistemas diferenciales

Sylvia NOVO
Rafael OBAYA
Jesús ROJO

Doctores en Matemáticas
Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid

Sylvia NOVO
Rafael OBAYA
Jesús ROJO

**Ecuaciones y
sistemas diferenciales**

McGraw-Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARIS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

Sylvia NOVO
Rafael OBAYA
Jesús ROJO

Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. de Ingenieros Industriales
Paseo del Cauce, s/n
47011 VALLADOLID , España

McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.

Edificio Valrealty, 1ª planta
Basauri, 17
28023 ARAVACA (Madrid)

ECUACIONES Y SISTEMAS DIFERENCIALES

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

© DERECHOS RESERVADOS 1995 McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.

I S B N 84 481 XXXX X

Depósito Legal: M-XXXXX/1995

Composición: T_EX-L^AT_EX, realizada por los propios autores

Editora: Isabel Capella

Grafismo: Félix Piñuela. Grafismo electrónico ??????????????????

Impreso en: Fernández Ciudad, S.L. ??????????????????????????????

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Contenido

Contenido	v
Prólogo.	ix
Notas para el lector.	xi
1 Introducción.	1
1.1 Ecuaciones diferenciales y soluciones.	1
1.1.20 Ejercicios.	12
1.2 Resultados sencillos para ecuaciones sencillas.	12
1.2.11 Ejercicios.	16
1.3 Significado geométrico de $y' = f(t, y)$	16
1.3.4 Ejercicios.	20
1.4 Crecimiento exponencial y crecimiento logístico.	21
1.4.7 Ejercicios.	27
1.5 Un ejemplo de linealización de una ecuación de segundo orden.	28
1.5.5 Ejercicios.	35
2 La ecuación escalar lineal de primer orden.	37
2.1 La ecuación escalar lineal de primer orden.	37
2.1.8 Ejercicios.	41
2.2 Cambios de variable.	42
2.2.15 Ejercicios.	49
2.3 Ecuaciones que se reducen a la lineal de primer orden.	51
2.3.10 Ejercicios.	55
3 Cuadraturas para la resolución de las ecuaciones escalares de primer orden.	59
3.1 Ecuaciones exactas.	60
3.1.19 Ejercicios.	68
3.2 Factores integrantes.	69

3.2.10	Ejercicios.	73
3.3	Algunos factores integrantes.	74
3.3.8	Ejercicios.	77
3.4	Factor integrante para las ecuaciones homogéneas.	80
3.4.5	Ejercicios.	82
3.5	Modelos con ecuaciones de primer orden.	83
3.5.4	Ejercicios.	87
4	Existencia. Unicidad de soluciones. Dependencia respecto de las condiciones iniciales y los parámetros.	93
4.1	Normas vectoriales y normas matriciales.	94
4.1.11	Ejercicios.	99
4.2	El espacio de las funciones continuas.	101
4.2.10	Ejercicios.	107
4.3	Un teorema local de existencia de soluciones.	108
4.3.10	Ejercicios.	116
4.4	Un teorema local de existencia y unicidad de soluciones.	118
4.4.20	Ejercicios.	129
4.5	Teoremas globales de existencia y unicidad.	131
4.5.30	Ejercicios.	148
4.6	Dependencia continua respecto de parámetros y condiciones iniciales.	152
4.6.17	Ejercicios.	166
4.7	Derivabilidad respecto de condiciones iniciales y parámetros.	167
4.7.10	Ejercicios.	175
5	Ecuaciones de primer orden no resueltas respecto de la derivada.	177
5.1	Planteamiento del problema; algunos ejemplos.	178
5.1.6	Ejercicios.	182
5.2	Un teorema de existencia y unicidad local.	183
5.2.6	Ejercicios.	186
5.3	El p -discriminante.	186
5.3.14	Ejercicios.	191
5.4	La envolvente de una familia de curvas y el c -discriminante.	192
5.4.13	Ejercicios.	196
5.5	Métodos de resolución de algunos tipos simples de ecuaciones no resueltas respecto de la derivada.	197
5.5.21	Ejercicios.	210
5.6	Las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut.	212
5.6.5	Ejercicios.	214

6 Ecuaciones y sistemas lineales.	217
6.1 Un teorema de existencia y unicidad.	217
6.1.9 Ejercicios.	221
6.2 Soluciones de un sistema lineal homogéneo.	222
6.2.22 Ejercicios.	234
6.3 Soluciones de un sistema no homogéneo.	235
6.3.8 Ejercicios.	239
6.4 Soluciones de la ecuación lineal homogénea.	240
6.4.28 Ejercicios.	253
6.5 La ecuación lineal no homogénea.	256
6.5.9 Ejercicios.	260
6.6 La función de Green para el problema de Cauchy.	260
6.6.14 Ejercicios.	270
7 Métodos de resolución de ecuaciones y sistemas lineales.	273
7.1 La exponencial de una matriz.	273
7.1.6 Ejercicios.	276
7.2 Sistemas lineales con coeficientes constantes.	277
7.2.25 Ejercicios.	294
7.3 Soluciones asociadas a los valores propios.	297
7.3.11 Ejercicios.	304
7.4 Sistemas lineales no homogéneos de coeficientes constantes.	305
7.4.13 Ejercicios.	312
7.5 Ecuaciones lineales con coeficientes constantes.	315
7.5.9 Ejercicios.	319
7.6 Ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes.	320
7.6.7 Ejercicios.	323
7.7 El método operacional.	326
7.7.30 Ejercicios.	338
7.8 El método de aniquilación.	340
7.8.9 Ejercicios.	343
7.9 La ecuación de Euler.	344
7.9.5 Ejercicios.	347
8 Sistemas y ecuaciones lineales de coeficientes periódicos.	349
8.1 La teoría de Floquet.	349
8.1.20 Ejercicios.	361
8.2 Algunos ejemplos.	366
8.2.6 Ejercicios.	371

9	La ecuación adjunta. Teoría de Sturm.	375
9.1	La ecuación adjunta.	376
9.1.21	Ejercicios.	387
9.2	Ecuaciones reales autoadjuntas de segundo orden.	388
9.2.14	Ejercicios.	393
9.3	La teoría de Sturm para la ecuación lineal real autoadjunta $[p(t)y']' + q(t)y = 0$	395
9.3.18	Ejercicios.	405
9.4	Ejemplo: la ecuación de Bessel.	408
9.4.2	Ejercicios.	411
10	Problemas lineales regulares de contorno.	413
10.1	Ejemplo: La cuerda vibrante.	414
10.1.2	Ejercicios.	417
10.2	Problemas lineales regulares de contorno.	418
10.2.22	Ejercicios.	428
10.3	La función de Green para el problema de contorno.	429
10.3.14	Ejercicios.	443
10.4	El problema adjunto; problemas autoadjuntos.	447
10.4.23	Ejercicios.	460
10.5	Problemas de autovalores.	463
10.5.22	Ejercicios.	483
10.6	Desarrollo en serie de autofunciones.	484
10.6.9	Ejercicios.	491
10.7	Problemas de autovalores de Sturm-Liouville.	493
10.7.8	Ejercicios.	501
10.8	Separación de variables.	503
10.8.15	Ejercicios.	519
	Libros cuya lectura se recomienda.	525
	Lista de Figuras	529
	Lista de Tablas	531
	Índice	533

Prólogo.

El texto del libro forma parte de un curso de Ecuaciones diferenciales que se ha venido impartiendo en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid. Sin embargo, no abordamos problemas singulares de contorno, funciones especiales, teoría de estabilidad, cálculo de variaciones, sistemas autónomos y métodos numéricos, que incluiremos en un volumen posterior. Algunos capítulos se han extendido algo más de lo que se hace habitualmente en nuestras clases, procurando que el libro pueda ser útil al mayor número posible de lectores. En este sentido, a pesar de estar dirigido a alumnos de Escuelas Técnicas, el libro puede ser útil a los alumnos de las Facultades de Ciencias.

El libro está pensado para facilitar la comprensión, por parte del alumno, de las técnicas básicas de ecuaciones diferenciales. Por ello se incluyen numerosos ejemplos y se detallan cuidadosamente la mayoría de las demostraciones. Omitimos algunas de las que presentan mayor dificultad, o que se basan en resultados que no forman parte de un curso básico de Álgebra lineal y de Cálculo, que son las materias que se suponen conocidas de antemano.

Los autores agradecen cuantas sugerencias les sean enviadas con objeto de mejorar el texto. Toda correspondencia con los autores puede dirigirse bien a McGraw-Hill, bien directamente a la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid.

No queremos terminar sin agradecer los desvelos de la editorial McGraw-Hill en la promoción y cuidado de este libro y, en particular, la preocupación de Isabel Capella, Editora de la División Universitaria. A todos cuantos de alguna manera han participado en la confección del libro, gracias.

Valladolid, abril de 1995

LOS AUTORES

Notas para el lector.

El libro se estructura en capítulos (del 1 al 10); cada capítulo, en secciones que llevan asignados dos números, el primero de los cuales es el del capítulo al que pertenecen; una sección se divide en apartados; de los tres números que asignamos a cada apartado, los dos primeros son los de la sección en la que se encuadra.

El último apartado de cada sección se reserva a los ejercicios. El ejercicio 3.1.19.4 es el cuarto ejercicio del apartado 3.1.19, o, si se prefiere, de la sección 3.1.

Las citas del tipo (véase 9.3.14) o (v. 9.3.14) se refieren a resultados anteriores que se utilizan en el texto. Se usan preferentemente cuando los resultados a que se refieren son algo lejanos. El número de citas disminuye a medida que avanza el texto ya que, poco a poco, el lector irá conservando en la memoria los resultados más importantes.

Los resultados que aparecen enmarcados por dos líneas llevan delante el título de TEOREMA, PROPOSICIÓN, COROLARIO o LEMA; todos ellos son teoremas. La razón por la que les asignamos diferentes títulos es dar una idea de su importancia y de su utilidad. En general hemos reservado el nombre de teorema para los que consideramos más importantes. Un corolario es un teorema que es consecuencia inmediata de otro que le precede. Un lema es un teorema cuya importancia reside, más que en sí mismo, en su utilización para probar un resultado que sigue a continuación.

La mayor parte de los resultados no aparecen enmarcados. Esto se debe en muchos casos a que nos ha parecido útil mezclar el enunciado con algunos comentarios, por lo que no se prestan tan claramente a separar enunciado, demostración y comentarios.

Aparecen diferentes símbolos para enumerar los catálogos de propiedades; lo más frecuente será encontrar a), b), c), etc. Los listados con (i), (ii), (iii), etc. son siempre de propiedades equivalentes entre sí.

Algunos ejercicios sólo poseen interés cuando se realizan inmediatamente a continuación de la teoría que los precede, porque sirven para mejorar la comprensión de ciertos temas. Si se dejan para más tarde pueden haber perdido buena parte de su interés; en ocasiones forman parte incluso de la exposición teórica posterior.

Las notaciones que aparecen en los ejercicios y que no se explican, son las que se han definido en la teoría.

Además del texto y los ejercicios, este libro posee varias secciones que el lector debe acostumbrarse a utilizar, ya que le resultarán útiles. Hay dos índices y una lista comentada de libros cuya lectura se recomienda.

Capítulo 4

Existencia. Unicidad de soluciones. Dependencia respecto de las condiciones iniciales y los parámetros.

Hemos visto en los capítulos anteriores métodos de integración por cuadraturas para los modelos más sencillos. También hemos visto ecuaciones que no tienen por soluciones a funciones elementales (lo que no quiere decir que estas ecuaciones carezcan de solución).

La existencia de soluciones es justamente lo que vamos a comprobar en este capítulo. En las dos primeras secciones nos dedicamos a introducir conceptos que serán utilizados más adelante. A continuación, fijamos condiciones muy generales en las que una ecuación diferencial tiene solución y en las que un problema de Cauchy tiene solución única. Todo esto es lo que ocupará nuestras secciones 4.3 y 4.4.

En la sección 4.5, estudiamos las características de los intervalos en que están definidas estas soluciones. Posteriormente, en las secciones 4.6 y 4.7, discutimos cómo afectan a las soluciones pequeños cambios en la formulación de la ecuación.

Los métodos que vamos a estudiar no son constructivos, es decir, no permiten obtener en las aplicaciones la fórmula de la solución. Sin embargo, fijamos unas bases sólidas que soportan la teoría de los capítulos siguientes. Es más, las teorías cualitativas o las numéricas intentan deducir propiedades de una solución desconocida, pero que se sabe que existe.

Este tema tiene mayor dificultad que los precedentes, y el lector lo comprobará desde su primera tentativa de lectura. Hemos procurado detallar cuantas demostraciones hemos incluido, y eliminar alguna de las demostraciones más técnicas, siempre con el ánimo de mantener el libro en un intervalo de dificultad no demasiado alto.

Para estudiar este mismo tema, y, en particular, las demostraciones que no hacemos, podemos recomendar al lector los textos de

[GUZMÁN] capítulos 3 y 4 y

[MARTÍNEZ/SANZ] capítulos I, II, III y IV.

También conviene aconsejar el libro de

[GARBAYO] capítulo 3,

dirigido especialmente a las Escuelas Técnicas. Finalmente, hay que recordar los textos de

[CODDINGTON/LEVINSON] capítulos 1 y 2,

[HARTMANN] capítulos 2, 3 y 5, y

[HALE] capítulo 1,

que abordan nuestro tema y, además, estudian otros aspectos conceptuales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.1 Normas vectoriales y normas matriciales.

4.1.1 Vamos a considerar ecuaciones vectoriales (sistemas) cuyas soluciones toman valores en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n . También vamos a trabajar con funciones que pertenecen a espacios vectoriales de dimensión infinita. En ambos casos, necesitamos suplir lo que significa el módulo de un número real o complejo por otra idea similar que sirva para medir el tamaño de los vectores y nos permita considerar distancias. El instrumento que se emplea con este objeto es generalmente la norma.

4.1.2 Norma en un espacio vectorial. Recordemos que una *norma* en un espacio vectorial E sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) es una aplicación de E en \mathbb{R} que envía cada vector, \mathbf{x} , a un número real, generalmente denotado por $\|\mathbf{x}\|$, de manera que se verifiquen las propiedades siguientes

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{x} \in E) \quad \|\mathbf{x}\| &\geq 0, \\ \|\mathbf{x}\| = 0 &\text{ si y sólo si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ (\forall \mathbf{x} \in E)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| &= |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \\ (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\textit{desigualdad triangular}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.3 De la desigualdad triangular se deduce inmediatamente la relación

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right|.$$

En efecto, aplicando la desigualdad triangular a los vectores $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ e \mathbf{y} se tiene que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|$, de donde $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Análogamente, aplicando lo mismo a $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ y a \mathbf{x} se obtiene que $\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Finalmente, la desigualdad del enunciado se sigue de las dos desigualdades probadas.

4.1.4 En lo que se refiere a los espacios de dimensión finita que vamos a usar, \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n , existe una infinidad de normas diferentes. Veamos cuáles son las más usuales. En primer lugar está la norma que proviene del producto escalar usual

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n;$$

esta norma se denota por $\|\cdot\|_2$ y vale

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2};$$

recibe el nombre de norma *euclídea*. También son muy utilizadas las dos normas siguientes:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

De manera más general, si $p \geq 1$ es un número real superior a 1, se define la norma ' p ' como

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son casos particulares de esta norma. La norma

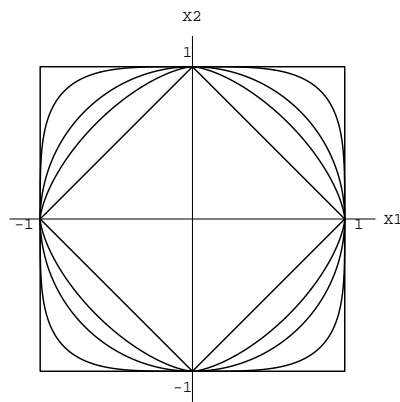


Figura 4.1: La esfera unidad de \mathbb{R}^2 , $\|\mathbf{x}\|_p = 1$, para varios valores de p (de dentro hacia fuera $p = 1, 3/2, 2, 4$ y ∞ , respectivamente).

$\|\mathbf{x}\|_\infty$ se obtiene para cada vector \mathbf{x} como el $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p$ (de ahí el símbolo con que se denota). La figura 4.1 representa la esfera unidad de \mathbb{R}^2 , o sea, el conjunto $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_p = 1\}$, para varios valores de p .

4.1.5 TEOREMA (equivalencia de las normas)

En \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n (o, más generalmente, en cualquier espacio de dimensión finita) dos normas cualesquiera, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes. O sea, existen constantes positivas, α y β , tales que

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}\|' \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|' \leq \beta \|\mathbf{x}\|$$

para todo vector \mathbf{x} del espacio. (Las constantes α y β son independientes del vector \mathbf{x} .)

Vamos a probar, en primer lugar, que una norma cualquiera, $\|\cdot\|$, y la norma $\|\cdot\|_2$ son equivalentes. Denotemos por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ la base canónica de \mathbb{K}^n , y sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vector cualquiera de \mathbb{K}^n . Utilizando la desigualdad de Schwarz para los vectores $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ y $(\|\mathbf{e}_1\|, \|\mathbf{e}_2\|, \dots, \|\mathbf{e}_n\|)$, y llamando $\alpha = (\sum \|\mathbf{e}_i\|^2)^{1/2}$, obtenemos

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|\mathbf{e}_i\| \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \alpha \|\mathbf{x}\|_2;$$

con esto se obtiene la primera desigualdad.

Para la segunda, consideremos la esfera unidad, $S = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$, que es un conjunto compacto de \mathbb{K}^n para la norma $\|\cdot\|_2$, y la función $\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|$ de \mathbb{K}^n en \mathbb{R} ; como

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

resulta que dicha función es continua para la norma $\|\cdot\|_2$, y alcanza su máximo y mínimo sobre el conjunto compacto S ; dado que $\mathbf{0} \notin S$, el mínimo será algún número $r > 0$; por lo tanto,

$$(\forall \mathbf{x} \in S) \quad \|\mathbf{x}\| \geq r.$$

Finalmente, si \mathbf{x} es un vector arbitrario de \mathbb{K}^n , entonces $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ es un vector de S , y se tiene

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \|\mathbf{x}\|_2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right\| = \|\mathbf{x}\|_2 \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right\| \geq r \|\mathbf{x}\|_2;$$

luego,

$$\|\mathbf{x}\|_2 \leq \frac{1}{r} \|\mathbf{x}\|,$$

y se obtiene la segunda desigualdad con $\beta = 1/r$. Así queda probada la equivalencia de cualquier norma con la norma $\|\cdot\|_2$.

Si ahora $\|\cdot\|'$ es otra norma y verifica

$$\|\mathbf{x}\|' \leq \alpha' \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta' \|\mathbf{x}\|',$$

resultará que

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta\beta' \|\mathbf{x}\|'$$

y que

$$\|\mathbf{x}\|' \leq \alpha' \|\mathbf{x}\|_2 \leq \alpha'\alpha \|\mathbf{x}\|,$$

lo que termina la demostración para \mathbb{K}^n . Si se desea probar el resultado para un espacio arbitrario, E , de dimensión n , lo más sencillo es tomar una base $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ de E y considerar el isomorfismo $f(x_1, \dots, x_n) = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ de \mathbb{K}^n en E . Si $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|'_E$ son dos normas de E y definimos, para $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\|_E$ y $\|\mathbf{x}\|' = \|f(\mathbf{x})\|'_E$, obtenemos dos normas en \mathbb{K}^n de las que ya sabemos que son equivalentes. Pues bien, ahora es inmediato que, para ambas normas de E , sirven las mismas desigualdades que existen entre las correspondientes normas de \mathbb{K}^n .

4.1.6 Por ejemplo, para las normas consideradas en 4.1.4, pueden servir las constantes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\leq n^{1/2} \|\mathbf{x}\|_2 & \text{y} & \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_2 & \text{y} & \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq n^{1/2} \|\mathbf{x}\|_\infty, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_1 & \text{y} & \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty, \end{aligned}$$

que, además, son las constantes más pequeñas que hacen ciertas las desigualdades (v. el ejercicio 2).

4.1.7 El resultado anterior hace que los conceptos de límite, continuidad, etc., que han sido definidos en \mathbb{R}^n o en \mathbb{C}^n para la norma $\|\cdot\|_2$, puedan ser utilizados con cualquier otra norma.

Así, por ejemplo, para $\mathbf{x}, \mathbf{x}_k \in \mathbb{K}^n$, se define generalmente

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$$

como

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_2 \rightarrow 0.$$

Pues bien, ahora es inmediato ver que esto equivale a que

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

para no importa qué norma. En particular, $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 0$ significa que \mathbf{x}_k converge a \mathbf{x} componente a componente (o sea, $x_{k,i} \rightarrow x_i$, $i = 1, \dots, n$).

4.1.8 Normas vectoriales y normas matriciales. Denotemos por $\|\mathbf{x}\|$ la norma del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o \mathbb{C}^n para alguna de las normas que consideramos en 4.1.4. Si, para una matriz cuadrada $n \times n$, A , ponemos

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

obtenemos una norma en el espacio de las matrices cuadradas. Pero, además de las propiedades generales de las normas, ésta verifica las dos siguientes:

$$\begin{aligned} \|AB\| &\leq \|A\| \|B\|, \\ \|A\mathbf{x}\| &\leq \|A\| \|\mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

para matrices A, B cuadradas $n \times n$ y vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o \mathbb{C}^n cualesquiera. Se sigue de la definición que $\|I_n\| = 1$.

Es bastante sencillo comprobar que la definición dada para $\|A\|$ resulta equivalente a las siguientes:

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|A\mathbf{x}\|, \quad \|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

(en realidad, gracias a la compacidad de la esfera unidad de \mathbb{R}^n y de \mathbb{C}^n y a la continuidad de la función $\mathbf{x} \rightarrow \|A\mathbf{x}\|$, las expresiones $\sup \|A\mathbf{x}\|$ se pueden sustituir por $\max \|A\mathbf{x}\|$), y también a la siguiente definición:

$$\|A\| = \inf \{ \alpha \mid (\forall \mathbf{x}) \|A\mathbf{x}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}\| \}.$$

4.1.9 Naturalmente, para distintas normas $\|\mathbf{x}\|$ de vectores resultan distintas normas $\|A\|$ de matrices. Todas las normas de un espacio de matrices cuadradas son equivalentes; al fin y al cabo, el espacio de las matrices cuadradas $n \times n$ no es sino \mathbb{K}^{n^2} . Pero la desigualdad $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$ es cierta cuando $\|A\mathbf{x}\|$ y $\|\mathbf{x}\|$ se toman con la norma vectorial que ha servido para definir $\|A\|$.

Para la norma vectorial $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$, la correspondiente norma matricial, que se denota por $\|A\|_\infty$, viene dada por

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{i,j}|.$$

Análogamente, para la norma vectorial $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, la correspondiente norma matricial, $\|A\|_1$, viene dada por

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{i,j}|.$$

Estas dos afirmaciones no son difíciles de probar, y se proponen como ejercicio para el lector.

Más difícil resulta precisar cuál es la norma matricial $\|A\|_2$ que proviene de la norma euclídea $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$. Si, para una matriz cuadrada, S , denotamos por $\rho(S)$ el llamado *radio espectral* de S , que es el módulo del autovalor de S con mayor valor absoluto, entonces se tiene que

$$\|A\|_2 = (\rho(A^*A))^{1/2},$$

o sea, $\|A\|_2^2$ es el radio espectral del producto de A^* por A (nótese que este producto es una matriz autoadjunta y positiva, por lo que sus autovalores son reales y mayores o iguales que 0). Por esta razón, la norma $\|A\|_2$ se denomina *norma espectral*. Cuando la matriz A es autoadjunta (simétrica o hermítica), entonces se tiene simplemente

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

También dejamos como ejercicio la prueba de estas afirmaciones.

4.1.10 Ya se ha dicho que todas las normas del espacio de las matrices $n \times n$ son equivalentes. Por lo tanto, la expresión

$$A_k \rightarrow A$$

se puede definir sin ambigüedad diciendo que significa que $\|A_k - A\| \rightarrow 0$ para no importa qué norma. Ello equivale también a decir que $A_k \rightarrow A$ componente a componente; en efecto, basta considerar cada matriz $n \times n$ como vector de \mathbb{R}^{n^2} o \mathbb{C}^{n^2} y tener en cuenta que la convergencia para la norma ‘vectorial’ $\|\cdot\|_\infty$ equivale a la convergencia de cada componente de la matriz.

4.1.11 Ejercicios.

1 Pruébese que, si $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n y P es una matriz inversible, real o compleja, entonces la fórmula

$$\|\mathbf{x}\|' = \|P\mathbf{x}\|$$

define también una norma.

2 Compruébese en relación con el apartado 4.1.6 que, para cada una de las desigualdades, existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ para el que se realiza la igualdad.

3 Sea $A = [\alpha_{i,j}]$ una matriz $n \times n$ y $\beta = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{i,j}|$; vamos a ver que β es justamente $\|A\|_1$. Para ello, pruébese en primer lugar que, para todo vector \mathbf{x} , $\|A\mathbf{x}\|_1 \leq \beta \|\mathbf{x}\|_1$. A continuación, si k es tal que $\sum_{i=1}^n |\alpha_{i,k}| = \beta$, considérese el vector \mathbf{e}_k de la base canónica y compruébese que para este vector $\|\mathbf{e}_k\|_1 = 1$ y que $\|A\mathbf{e}_k\|_1 = \beta = \beta \|\mathbf{e}_k\|_1$. Dedúzcase de lo anterior que $\|A\|_1 = \beta$.

4 Sea $A = [\alpha_{i,j}]$ una matriz $n \times n$ y $\alpha = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{i,j}|$; vamos a ver que α es justamente $\|A\|_\infty$. Para ello, pruébese en primer lugar que, para todo vector \mathbf{x} , $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \alpha \|\mathbf{x}\|_\infty$. A continuación, si k es tal que $\sum_{j=1}^n |\alpha_{k,j}| = \alpha$, considérese el vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ cuyas componentes valen $y_j = |\alpha_{k,j}|/\alpha_{k,j}$ si $\alpha_{k,j} \neq 0$ e $y_j = 1$ si $\alpha_{k,j} = 0$. Compruébese que para este vector $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$ y que $\|A\mathbf{y}\|_\infty \geq \alpha = \alpha \|\mathbf{y}\|_\infty$. Dedúzcase de lo anterior que $\|A\|_\infty = \alpha$.

5 Sea $A = [\alpha_{i,j}]$ una matriz $n \times n$. Vamos a ver que el radio espectral $\rho(A^*A)$ es el cuadrado $\|A\|_2^2$ de la norma espectral de A . Para ello, recordemos que A^*A es una matriz autoadjunta positiva y que sus autovalores son números reales positivos; supongámoslos ordenados de mayor a menor

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0;$$

Se tiene que $\rho(A^*A) = \lambda_1$. Denotemos por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ vectores propios de A^*A correspondientes a dichos autovalores y formando una base ortonormal de \mathbb{C}^n . Considerando las coordenadas de un vector \mathbf{x} en esta base, pruébese que $\|A\mathbf{x}\|_2^2 \leq \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_2^2$. Pruébese además que, para el vector \mathbf{a}_1 , $\|A\mathbf{a}_1\|_2^2 = \lambda_1 = \lambda_1 \|\mathbf{a}_1\|_2^2$. Dedúzcase de lo anterior el valor de $\|A\|_2$.

6 Compruébese, recordando la relación entre los autovalores de A y los de A^2 , que, si A es una matriz autoadjunta, entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$.

7 Pruébese que, si A es una matriz cuadrada, $\rho(A)$ su radio espectral y $\|A\|$ una norma de las definidas en 4.1.8, se tiene la desigualdad

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

8 Sea $A = [\alpha_{i,j}]$ una matriz $n \times n$ y pongamos

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |\alpha_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Compruébese que el valor de $\|A\|_E$ coincide con el de $(\text{tr}(A^*A))^{1/2}$. Pruébese que $\|\cdot\|_E$ así definida es una norma en el espacio de las matrices cuadradas (la *norma de Schur*) y que, además, verifica las desigualdades

$$\|AB\|_E \leq \|A\|_E \|B\|_E,$$

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_E \|\mathbf{x}\|_2 .$$

Pruébese que, sin embargo, no puede ser ninguna de las normas definidas con arreglo a 4.1.8 (¿cuánto vale $\|I_n\|_E$?).

4.2 El espacio de las funciones continuas.

4.2.1 Nos vamos a interesar brevemente por el espacio

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$$

de las funciones definidas en el intervalo finito $[a, b]$ de la recta real, con llegada en el espacio \mathbb{C}^n de los vectores n -dimensionales, y continuas en el intervalo de definición. Se trata de un conocido ejemplo de espacio vectorial de dimensión infinita. Naturalmente, el lector que se sienta molesto con el espacio de llegada, puede comenzar por considerar \mathbb{R}^n , que le resultará más cómodo (por ejemplo, \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 son ‘visibles’).

En \mathbb{C}^n vamos a representar por $\|\mathbf{x}\|$ cualquiera de las normas de \mathbf{x} (acabamos de ver que todas son equivalentes).

Vamos a dotar a $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$ de una estructura de espacio vectorial normado. Hay muchas formas de hacer esto (de dar normas sobre el espacio). Por ejemplo, se puede poner

$$(\mathbf{f}|\mathbf{g}) = \int_a^b (\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t)) dt$$

y

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \left(\int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} ,$$

que son un producto escalar y su norma asociada. En el caso de las funciones escalares, o sea de las funciones de

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) ,$$

este producto vectorial y norma son

$$(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$$

y

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(los utilizaremos más adelante en este caso).

Pero la norma que por ahora va a interesarnos más es

$$\boxed{\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \|\mathbf{f}(t)\|,} \quad (4.2)$$

donde medimos $\|\mathbf{f}(t)\|$ con cualquiera (pero siempre la misma) de las normas equivalentes de \mathbb{C}^n . Digamos primeramente que, como toda función continua en un compacto alcanza su máximo, el extremo superior existe y se alcanza en un punto del intervalo $[a, b]$. Basándose en las propiedades de la norma de \mathbb{C}^n , es inmediato ver que

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)) \quad & \|\mathbf{f}\|_\infty \geq 0, \\ \|\mathbf{f}\|_\infty = 0 \quad & \text{si y sólo si } \mathbf{f} = 0, \\ (\forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)) (\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad & \|\lambda \mathbf{f}\|_\infty = |\lambda| \|\mathbf{f}\|_\infty, \\ (\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)) \quad & \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_\infty \leq \|\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty, \end{aligned}$$

o sea, que hemos definido efectivamente una norma. Con ella,

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$$

es un espacio normado, luego un espacio métrico para la distancia

$$d_\infty(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_\infty.$$

Lo que mide esta distancia es la máxima desviación de las imágenes de ambas funciones a lo largo del intervalo.

En este espacio, que es de dimensión infinita, las normas no son equivalentes. El problema 1 da un ejemplo de esta afirmación.

4.2.2 En cuanto a lo que significa la convergencia en el espacio normado $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$, se tiene que \mathbf{f}_n converge hacia \mathbf{f} (es decir, $\|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\| \rightarrow 0$) si y sólo si $\mathbf{f}_n(t)$ converge a $\mathbf{f}(t)$ puntualmente y además la convergencia es uniforme en $[a, b]$.

Vamos a recordar dos resultados (que utilizaremos) sobre la convergencia en este espacio, que no es más que, como hemos visto, la convergencia uniforme. El primero es que toda función límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

El segundo es la completitud del espacio normado y métrico $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$, o sea, toda sucesión de funciones continuas que sea uniformemente de Cauchy, es decir, de Cauchy para la norma de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$, converge hacia una función continua en $[a, b]$.

4.2.3 Nos dirigimos hacia el teorema de Arzelà-Ascoli, un resultado clásico que será importante para nosotros. Su demostración requiere dos definiciones que vamos a dar a continuación. Sea $(\mathbf{f}_i)_{i \in I}$ una familia (un subconjunto) de $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{C}^n)$.

La familia $(\mathbf{f}_i)_{i \in I}$ está *uniformemente acotada* cuando existe una constante M tal que

$$(\forall i \in I)(\forall t \in [a, b]) \quad \|\mathbf{f}_i(t)\| \leq M,$$

que es lo mismo que poner

$$(\forall i \in I) \quad \|\mathbf{f}_i\|_\infty \leq M.$$

Significa que las funciones están acotadas y sirve para todas la misma cota.

La familia $(\mathbf{f}_i)_{i \in I}$ es *equicontinua* cuando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon)$ tal que

$$(\forall i \in I)(\forall t, t' \in [a, b]) \quad |t - t'| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(t')\| < \epsilon.$$

Nótese que esto significa que las \mathbf{f}_i son uniformemente continuas y que lo son con el mismo ‘módulo’ de continuidad.

Por ejemplo, si la familia verifica una propiedad como

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(t')\| \leq M|t - t'|,$$

entonces es equicontinua, pues basta elegir $\delta = \epsilon/M$.

Para funciones escalares continuas $(f_i)_{i \in I}$, cuando la familia de las derivadas, $(f'_i)_{i \in I}$, está uniformemente acotada, es decir, cuando existe una constante M tal que

$$(\forall i \in I)(\forall t \in [a, b]) \quad |f'_i(t)| \leq M,$$

entonces la familia $(f_i)_{i \in I}$ es equicontinua, ya que

$$|f_i(t) - f_i(t')| = |f'_i(\xi)| |t - t'| \leq M |t - t'|$$

y para cualquier ϵ basta tomar $\delta = \epsilon/M$, como acabamos de decir.

Con la mayor frecuencia emplearemos estas propiedades para familias que sean sucesiones de funciones. Es lo que hacemos en los ejemplos y el teorema siguientes.

4.2.4 Ejemplo. La sucesión de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ dada por

$$f_n(t) = t^n$$

está uniformemente acotada (por 1), pero no es equicontinua. En efecto, tomamos $\epsilon = 1/2$. Para δ arbitrario (entre 0 y 1) la sucesión $(1 - \delta)^n$ tiende a 0, luego $1 - (1 - \delta)^n$ tiende a 1. Por lo tanto, la sucesión

$$|f_n(1) - f_n(1 - \delta)| = |1 - (1 - \delta)^n|$$

tiende hacia uno, y de un n en adelante es mayor que $1/2$ (nuestro ϵ). Por lo tanto, para δ arbitrariamente pequeño, existen n, t, t' tales que

$$|f_n(t) - f_n(t')|$$

no puede ser menor que nuestro ϵ . Es decir, la sucesión no es equicontinua.

4.2.5 Ejemplo. La sucesión de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ dada por

$$f_n(t) = n \cos \frac{t}{n}$$

es equicontinua, ya que las derivadas de las funciones son

$$f_n'(t) = -\sin \frac{t}{n},$$

y son uniformemente acotadas. Sin embargo no está uniformemente acotada (con cota válida para todos los elementos de la sucesión) en $t = 0$, como es prácticamente evidente.

4.2.6 La aparición ‘simultánea’ de las dos propiedades anteriores va a tener consecuencias importantes. Es lo que refleja el teorema siguiente, fundamental en los procesos de aproximación de este capítulo.

4.2.7 TEOREMA (Arzelà-Ascoli)

Sea $(\mathbf{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$. uniformemente acotada y equicontinua. Existe una subsucesión $(\mathbf{f}_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a un límite $\mathbf{f} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$.

Inicialmente vamos a demostrar que existe una subsucesión que converge puntualmente sobre los racionales de $[a, b]$. Para ello consideramos los racionales de $[a, b]$ escritos en forma de sucesión $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (se puede poner de esta

manera cualquier conjunto numerable, y los racionales es uno de ellos). La sucesión $(\mathbf{f}_n(q_1))_n$ está acotada y existe $(n_j^{(1)})_j$ tal que $(\mathbf{f}_{n_j^{(1)}}(q_1))_j$ es convergente. Como la subsucesión $(\mathbf{f}_{n_j^{(1)}}(q_2))_j$ está acotada, existe $(n_j^{(2)})_j$, extraída de $(n_j^{(1)})_j$, de tal manera que $(\mathbf{f}_{n_j^{(2)}}(q_2))_j$ sea convergente (y también lo sea $(\mathbf{f}_{n_j^{(2)}}(q_1))_j$, por tratarse de una subsucesión de una sucesión convergente). Repitiendo este mismo argumento, encontramos para cada l $(n_j^{(l)})_j$, de manera que $(\mathbf{f}_{n_j^{(l)}}(q_l))_j$ sea convergente (y lo sea también para q_1, q_2, \dots, q_l); es decir podemos hacer que converjan las sucesiones

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f}_{n_1^{(1)}}(q_1) & , & \mathbf{f}_{n_2^{(1)}}(q_1) & , & \dots & , & \mathbf{f}_{n_j^{(1)}}(q_1) & , & \dots \\ \mathbf{f}_{n_1^{(2)}}(q_2) & , & \mathbf{f}_{n_2^{(2)}}(q_2) & , & \dots & , & \mathbf{f}_{n_j^{(2)}}(q_2) & , & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \\ \mathbf{f}_{n_1^{(l)}}(q_l) & , & \mathbf{f}_{n_2^{(l)}}(q_l) & , & \dots & , & \mathbf{f}_{n_j^{(l)}}(q_l) & , & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

de las que cada una es una especie de subsucesión de la anterior, en el sentido de que evaluamos en cada punto una subsucesión de las funciones que ya convergían en los puntos anteriores. Tomando ahora la sucesión

$$(\mathbf{f}_{n_k})_k = (\mathbf{f}_{n_k^{(k)}})_k$$

que se encuentra en la diagonal de la tabla anterior, vemos que cada

$$(\mathbf{f}_{n_k}(q_l))_k$$

es convergente para todo $l \in \mathbb{N}$, ya que, para l fijo, se trata desde un término en adelante de una subsucesión de una sucesión convergente en q_l . Por tomar la diagonal de la tabla de sucesiones, el procedimiento se llama *proceso diagonal* de Cantor. En él hemos utilizado la acotación uniforme de la sucesión de funciones, aunque sólo para cada uno de los puntos q_l .

Comprobaremos ahora que la sucesión $(\mathbf{f}_{n_k})_k$ así definida converge en todo punto de $[a, b]$ hacia una función $\mathbf{f} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$ y que la convergencia es uniforme (o sea en la norma de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$). De hecho, lo que probaremos será que la sucesión es de Cauchy para la norma del espacio (uniformemente de Cauchy), y aplicaremos entonces lo que hemos llamado la completitud de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$, o sea, lo que vimos en 4.2.2. La prueba de esta parte será consecuencia de la equicontinuidad de $(\mathbf{f}_n)_n$.

Fijado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $t, t' \in [a, b]$ y $|t - t'| < \delta$, entonces $\|\mathbf{f}_n(t) - \mathbf{f}_n(t')\| < \epsilon/3$. Fijado δ con tales características buscamos racionales de $[a, b]$ q_1, q_2, \dots, q_l (no son los primeros de nuestra sucesión, pero los numeraremos por comodidad de esa manera) tales que

$$\max\{q_1 - a, b - q_l, q_{j+1} - q_j, j = 1, 2, \dots, l - 1\} < \delta;$$

es decir, dividimos el intervalo $[a, b]$ mediante puntos racionales en subintervalos de longitud $< \delta$. Las sucesiones $(\mathbf{f}_{n_k}(q_j))_k$ son convergentes en \mathbb{C}^n , como ya sabemos, luego verifican una condición de Cauchy. Existe k_0 , dependiente de ϵ pero independiente de q_j (basta tomar el mayor de los k_0), tal que, si $k, k' \geq k_0$, entonces

$$\|\mathbf{f}_{n_k}(q_j) - \mathbf{f}_{n_{k'}}(q_j)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Finalmente, si $t \in [a, b]$, existe $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ con $|t - q_j| < \delta$. Por lo tanto, para $k, k' \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{n_k}(t) - \mathbf{f}_{n_{k'}}(t)\| &\leq \|\mathbf{f}_{n_k}(t) - \mathbf{f}_{n_k}(q_j)\| + \|\mathbf{f}_{n_k}(q_j) - \mathbf{f}_{n_{k'}}(q_j)\| + \\ &\quad + \|\mathbf{f}_{n_{k'}}(q_j) - \mathbf{f}_{n_{k'}}(t)\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

y esto con k_0 independiente de t , lo que prueba que la sucesión es uniformemente de Cauchy, y termina el teorema.

4.2.8 Ejemplo. Consideremos las funciones

$$f_n(t) = \left(\frac{t}{n} - 1\right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

en cualquier intervalo de la forma $[0, b]$, funciones que son continuas en dicho intervalo. La sucesión está uniformemente acotada (por 1 de un n en adelante). También lo está la sucesión de las derivadas (de la misma manera). Por lo tanto (v. 4.2.3), la sucesión es también equicontinua y el teorema de Arzelà-Ascoli asegura que existen subsucesiones que convergen uniformemente a una función continua.

Eso es justamente lo que ocurre. Para n par, la subsucesión converge uniformemente a e^{-t} y para n impar, hacia $-e^{-t}$, como ya es conocido.

4.2.9 Ejemplo. La sucesión

$$f_n(t) = t^n$$

de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ del ejemplo 4.2.4 está uniformemente acotada y no es equicontinua. Admite como límite puntual la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

que no es continua.

4.2.10 Ejercicios.

1 Veamos que, en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^n)$, las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes. Se considera la sucesión de funciones continuas escalares de $[0, 1]$ (o sea de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$) definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

(hágase un dibujo). Pruébese que $\|f_n\|_2 \rightarrow 0$ (o sea que f_n tiende a 0 para la norma $\|\cdot\|_2$), pero que $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$, (o sea que f_n no tiende a 0 para la norma $\|\cdot\|_\infty$).

2 Consideremos la sucesión de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ (o sea, de funciones continuas de $[0, 1]$)

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ n \left(t - \frac{1}{2}\right), & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \\ 1, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Pruébese que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_2$, pero que no hay ninguna función $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ tal que $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$ (esto prueba que el espacio $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$, con la norma $\|\cdot\|_2$, no es completo).

3 En el teorema de Arzelà-Ascoli, la compacidad del intervalo en el que las funciones de la sucesión son continuas es fundamental. Si el intervalo no es finito o no es cerrado, la conclusión puede no ser cierta. Por ejemplo, sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(t) = e^{-t^2}$ y consideremos las funciones $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por

$$f_n(t) = f(t - n).$$

Pruébese que la sucesión es equicontinua y está uniformemente acotada, pero que ninguna subsucesión converge uniformemente en todo \mathbb{R} .

4 Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una sucesión de funciones continuas y crecientes que convergen a una función continua f . Pruébese que f es también creciente y que la convergencia es uniforme.

5 Teorema de Dini. Sean $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas con $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función continua f . Pruébese que la convergencia es uniforme en $[a, b]$.

4.3 Un teorema local de existencia de soluciones.

4.3.1 Aunque en el capítulo precedente hemos presentado varias ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de fenómenos físicos (luego con solución, en la práctica), no es evidente que toda ecuación diferencial tenga soluciones.

4.3.2 Ejemplo. La ecuación

$$(y')^2 + y^2 + 1 = 0$$

no posee ninguna solución real, ya que la igualdad anterior es imposible para todo par y, y' de números reales.

4.3.3 Ejemplo. La ecuación

$$y' = f(y) = \begin{cases} 1, & \text{para } y \text{ racional,} \\ -1, & \text{para } y \text{ irracional,} \end{cases}$$

carece de soluciones. La explicación está en que la función $f(y)$ no posee la propiedad ‘de los valores intermedios’ y no puede ser una derivada. Se dice que una función posee la propiedad *de los valores intermedios* cuando pasa de un valor a otro tomando todos los intermedios. Esta propiedad la verifican todas las derivadas y no la verifica, obviamente, nuestra función.

4.3.4 Por otra parte sabemos que, en general, las ecuaciones poseen una infinidad de soluciones. Se necesita ajustar alguna condición para obtener una única solución. Hemos visto que hay varias formas de hacerlo, y nosotros nos vamos a ocupar ahora de las ecuaciones convertidas en problemas de Cauchy mediante una condición inicial.

Un teorema de existencia garantiza que determinado problema admite solución. Uno de existencia y unicidad garantiza que dicha solución existe y, además, que sólo hay una. Nos vamos a interesar en este capítulo por ambos tipos de teoremas.

En general, los teoremas que veamos no serán constructivos, es decir, no permitirán calcular fórmulas de las soluciones. Pese a ello, la importancia de estos resultados es grande. Gracias a ellos sabemos que estamos

utilizando una formulación matemática razonable, previendo así una función que indica el comportamiento futuro del problema, aunque todavía no sepamos calcular dicha solución.

4.3.5 Nuestra intención es demostrar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

admite soluciones siempre que la ecuación diferencial correspondiente esté definida mediante una función continua en un abierto, D , de \mathbb{R}^{n+1} . Como ya dijimos, entenderemos las soluciones definidas siempre en intervalos. Cuando la solución $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ esté definida en un intervalo que es cerrado por alguno de sus extremos, tomaremos como derivada en dicho extremo la correspondiente derivada lateral. Como una curva solución une puntos de la misma componente conexa, los métodos que vamos a utilizar se pueden aplicar a cada componente conexa de D por separado. Por esta razón, se supone en algunos textos que el abierto D de definición es un conjunto conexo.

Nada de lo dicho anteriormente contradice lo visto en los ejemplos 4.3.2 y 4.3.3. En el primero, la ecuación no se puede poner en la forma normal (con y' despejada); el segundo presenta una ecuación cuya función f no es siquiera continua.

Previo al primer teorema, conviene dar una formulación ‘integral’ del problema de Cauchy.

4.3.6 Forma integral del problema de Cauchy. Recordemos que el problema de Cauchy para el sistema o la ecuación de primer orden es (v. 1.1.11)

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Aquí $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función continua de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^n , definida exclusivamente en una parte de \mathbb{R}^{n+1} que nos encargaremos de precisar en cada caso, t_0 es un punto de \mathbb{R} e \mathbf{y}_0 es un vector arbitrario de \mathbb{R}^n .

Pues bien, consideremos el problema de Cauchy precedente. Buscar una solución $\mathbf{y}(t)$ de clase \mathcal{C}^1 en un intervalo I que contenga a t_0 , equivale a buscar una función continua en I y que verifique

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds,} \quad (4.4)$$

para todo $t \in I$. Salvo casos específicos, buscaremos siempre estas soluciones $\mathbf{y}(t)$ de clase \mathcal{C}^1 , aunque posee considerable interés la búsqueda de soluciones con menos propiedades de regularidad.

Veamos la equivalencia anunciada. Derivando (4.4) se obtiene el sistema de primer orden; la condición inicial es evidente pues $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$; además $\mathbf{y}(t)$ es de clase \mathcal{C}^1 pues su derivada es $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$, que es una función continua. Recíprocamente, si $\mathbf{y}(t)$ es solución del problema de Cauchy, entonces es la primitiva de $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ que vale \mathbf{y}_0 en t_0 , luego cumple (4.4).

Como comprobaremos de inmediato, esta formulación integral del problema de Cauchy resulta a veces más cómoda de manejar. La substitución del problema diferencial por un problema integral será un método de trabajo que emplearemos varias veces en este libro. Lo esencial es la variación continua de la integración respecto de los datos del problema, cosa que no sucede con la derivación.

4.3.7 El siguiente es un ejemplo de teorema local de existencia, ya que garantiza la solución de un problema de Cauchy en un ‘pequeño’ entorno alrededor de los datos iniciales.

TEOREMA (Cauchy-Peano)

Supongamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función continua en un entorno, D de (t_0, \mathbf{y}_0) . Entonces, existe un intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ alrededor de t_0 y una función $\mathbf{y}(t)$, definida en él y con gráfica contenida en D , de tal manera que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, que $\mathbf{y}(t)$ es derivable en $[t_0 - r, t_0 + r]$ y que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

en dicho intervalo.

Si el ‘rectángulo’

$$R = \{(t, \mathbf{y}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$$

está contenido en D y

$$M = \max_{(t, \mathbf{y}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|,$$

entonces se puede tomar

$$r = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Recuérdese (véase la sección 1.3) que la ecuación diferencial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

de la que pretendemos buscar una solución, define un campo de direcciones con las que deben pasar (por cada punto) las curvas solución. Esta idea geométrica es la que va a permitirnos obtener la solución.

Nuestra demostración utiliza las ‘poligonales de Euler’, definidas (una para cada longitud $h_n = r/n$ del paso) como sigue. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $h_n = r/n$ y dividamos el intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ en $2n$ subintervalos de igual longitud con extremos en los puntos

$$t_{i,n} = t_0 + i h_n, \quad i = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1, n.$$

Para cada n se tiene así

$$\begin{aligned} t_0 - r = t_{-n,n} < t_{-n+1,n} < \dots < t_{-1,n} < \\ < t_{0,n} = t_0 < t_{1,n} < \dots < t_{n-1,n} < t_{n,n} = t_0 + r. \end{aligned}$$

Definimos ahora para cada n una poligonal con vértices en estas abscisas, prefijando primero su valor en t_0 y extendiendo sucesivamente su definición a los intervalos situados a la derecha e izquierda de t_0 , utilizando como pendientes los valores de \mathbf{f} en los extremos de la poligonal ya construida. El proceso es el siguiente: en primer lugar ponemos

$$\mathbf{p}_n(t_{0,n}) = \mathbf{p}_n(t_0) = \mathbf{y}_0.$$

Luego, en el intervalo $[t_{-1,n}, t_{0,n} = t_0]$ se tiene

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}_n(t_{0,n}) + (t - t_{0,n}) \mathbf{f}(t_{0,n}, \mathbf{p}_n(t_{0,n})),$$

y en $[t_{0,n} = t_0, t_{1,n}]$,

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}_n(t_{0,n}) + (t - t_{0,n}) \mathbf{f}(t_{0,n}, \mathbf{p}_n(t_{0,n}))$$

(como vemos, los dos primeros lados de la poligonal componen una recta). De manera general, supuesta definida la poligonal en $t_{-i,n}$ y $t_{i,n}$ para $i = 0, \dots, n - 1$, ponemos en $[t_{-i-1,n}, t_{-i,n}]$

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}_n(t_{-i,n}) + (t - t_{-i,n}) \mathbf{f}(t_{-i,n}, \mathbf{p}_n(t_{-i,n})),$$

y en $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{p}_n(t_{i,n}) + (t - t_{i,n}) \mathbf{f}(t_{i,n}, \mathbf{p}_n(t_{i,n})).$$

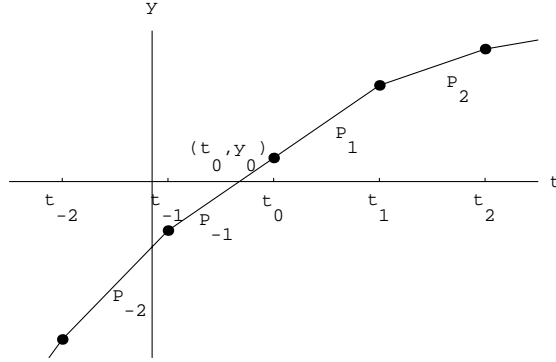


Figura 4.2: Los cuatro lados centrales de una poligonal de Euler. Sus definiciones son las siguientes: $p(t) = p(t_1) + (t - t_1)f(t_1, p(t_1))$ en el intervalo P_2 ; $p(t) = p(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y_0)$ en el intervalo P_1 ; $p(t_0) = y_0$ en el punto t_0 ; $p(t) = p(t_0) + (t - t_0)f(t_0, y_0)$ en el intervalo P_{-1} ; $p(t) = p(t_{-1}) + (t - t_{-1})f(t_{-1}, p(t_{-1}))$ en el intervalo P_{-2} .

Aquí vendrá bien hacer un dibujo de los dos o cuatro primeros lados de la poligonal, que es lo que hemos hecho en la figura 4.2. Si se ve la figura, parece razonable pensar que estas poligonales aproximan alguna de las soluciones del problema de Cauchy cuando $n \rightarrow \infty$. Así es, pero no siempre converge la sucesión de poligonales, sino únicamente una subsucesión. La prueba se basa en el teorema de Arzelà-Ascoli y exige pues dos propiedades de la sucesión de poligonales, acotación uniforme y equicontinuidad.

Veamos en primer lugar que la poligonal está bien definida, o sea, que todos los puntos que se definen están en D . Nosotros nos basaremos en el rectángulo R , que es una figura de geometría conocida situada dentro de D . Como $(t_0, \mathbf{p}_n(t_0) = \mathbf{y}_0) \in R$, podemos definir

$$\tilde{r} = \sup\{\rho \in [0, r] \mid (\forall t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]) \quad (t, \mathbf{p}_n(t)) \in R\}.$$

Consideremos para cada n la función escalonada y definida para $|t - t_0| \leq \tilde{r}$

$$\mathbf{q}_n(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0), & t = t_0 = t_{0,n} \\ \mathbf{f}(t_{-i,n}, \mathbf{p}_n(t_{-i,n})), & t \in [t_{-i-1,n}, t_{-i,n}) \\ \mathbf{f}(t_{i,n}, \mathbf{p}_n(t_{i,n})), & t \in (t_{i,n}, t_{i+1,n}], \end{cases}$$

con escalones de la misma longitud que los intervalos que marcan la poligonal. Los valores de \mathbf{q}_n son valores de \mathbf{f} tomados en el rectángulo R , luego $\|\mathbf{q}_n(t)\| \leq M$ para $|t - t_0| \leq \tilde{r}$. Se trata justamente de la derivada a trozos

de la poligonal \mathbf{p}_n . Como \mathbf{p}_n es continua y con derivada continua a trozos, se tiene

$$\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{p}'_n(s) ds = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{q}_n(s) ds. \quad (4.5)$$

Por lo tanto, si $|t - t_0| \leq \tilde{r}$,

$$\|\mathbf{p}_n(t) - \mathbf{y}_0\| \leq \max_{|t-t_0| \leq \tilde{r}} \|\mathbf{q}_n(t)\| |t - t_0| \leq M \tilde{r} \leq M r \leq b.$$

Si suponemos que $\tilde{r} < r$, entonces la cantidad anterior sería $< b$ y $\tilde{r} < r \leq a$, lo que contradice la propia definición de \tilde{r} (podríamos aún considerar un mayor trozo de poligonal contenido en el rectángulo). Por lo tanto, $\tilde{r} = r$ y toda la poligonal está contenida en el rectángulo.

Por otra parte, la desigualdad

$$\|\mathbf{p}_n(t) - \mathbf{y}_0\| \leq b,$$

para $|t - t_0| \leq r$, garantiza que las poligonales están uniformemente acotadas por $\|\mathbf{y}_0\| + b$.

Además, si $t, t' \in [t_0 - r, t_0 + r]$, entonces

$$\|\mathbf{p}_n(t) - \mathbf{p}_n(t')\| = \left\| \int_t^{t'} \mathbf{q}_n(s) ds \right\| \leq M |t - t'|.$$

Como vimos en 4.2.3, esto sirve para asegurar la equicontinuidad de las poligonales.

Por el teorema de Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión \mathbf{p}_{n_j} de poligonales que converge uniformemente (o sea en la norma de $\mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{C}^n)$) hacia una función $\mathbf{y}(t)$ continua en $[t_0 - r, t_0 + r]$. Naturalmente queda por ver que $\mathbf{y}(t)$ es en dicho intervalo solución del problema de Cauchy. Eso lo haremos en dos partes.

En la primera, veremos que $\mathbf{q}_{n_j}(t)$ converge hacia $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$. Fijemos $\epsilon > 0$. En primer lugar, por la continuidad uniforme de \mathbf{f} en el rectángulo R (si \mathbf{f} es continua en el rectángulo, es uniformemente continua en él) existe δ_1 tal que, si $|t - t'| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| < \delta_1$, entonces $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t', \mathbf{y}')\| < \epsilon/2$. En segundo lugar, por la continuidad uniforme de $\mathbf{y}(t)$ en $[t_0 - r, t_0 + r]$ (si $\mathbf{y}(t)$ es continua en dicho intervalo es uniformemente continua en él), existe δ_2 por una parte $< \delta_1/2$ y además tal que, si $t, t' \in [t_0 - r, t_0 + r]$ y $|t - t'| < \delta_2$, entonces $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t')\| < \delta_1/2$. Finalmente, por la convergencia uniforme de $\mathbf{p}_{n_j}(t)$ hacia $\mathbf{y}(t)$, resulta que existe j_0 tal que, si $j \geq j_0$, entonces $r/n_j < \delta_2$ y $\|\mathbf{p}_{n_j}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \delta_1$ para

$t \in [t_0 - r, t_0 + r]$. En consecuencia, si $j \geq j_0$ y $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, tenemos suponiendo que $t \in (t_{i,n}, t_{i+1,n}]$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_{n_j}(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| &= \|\mathbf{f}(t_{i,n_j}, \mathbf{p}_{n_j}(t_{i,n_j})) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \\ &\leq \|\mathbf{f}(t_{i,n_j}, \mathbf{p}_{n_j}(t_{i,n_j})) - \mathbf{f}(t_{i,n_j}, \mathbf{y}(t_{i,n_j}))\| + \\ &\quad + \|\mathbf{f}(t_{i,n_j}, \mathbf{y}(t_{i,n_j})) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra, como queríamos ver, que $\mathbf{q}_{n_j}(t)$ converge hacia $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$.

En la segunda, veremos que $\mathbf{y}(t)$ verifica la ecuación integral equivalente al problema de Cauchy. Recordemos que en (4.5) probamos la igualdad

$$\mathbf{p}_{n_j}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{q}_{n_j}(s) ds.$$

Pues bien, tomando ahora límites en ambos miembros cuando $j \rightarrow \infty$, se obtiene después de lo que acabamos de ver que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds,$$

que es lo que nos quedaba por probar.

4.3.8 Ejemplo. El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

no se puede resolver mediante cuadraturas (la ecuación es de Riccati y conviene ver a este respecto el problema 13 de la sección 2.3). Sin embargo admite una única solución y las ‘poligonales de Euler’ convergen uniformemente hacia dicha solución, como deja ver la figura 4.3.

4.3.9 Ejemplo. La ecuación

$$y' = 3y^{2/3}$$

es muy fácil de resolver por cuadraturas. Como es de variables separadas, sus soluciones se obtienen como

$$\int \frac{1}{3} y^{-2/3} dy = c + \int dt,$$

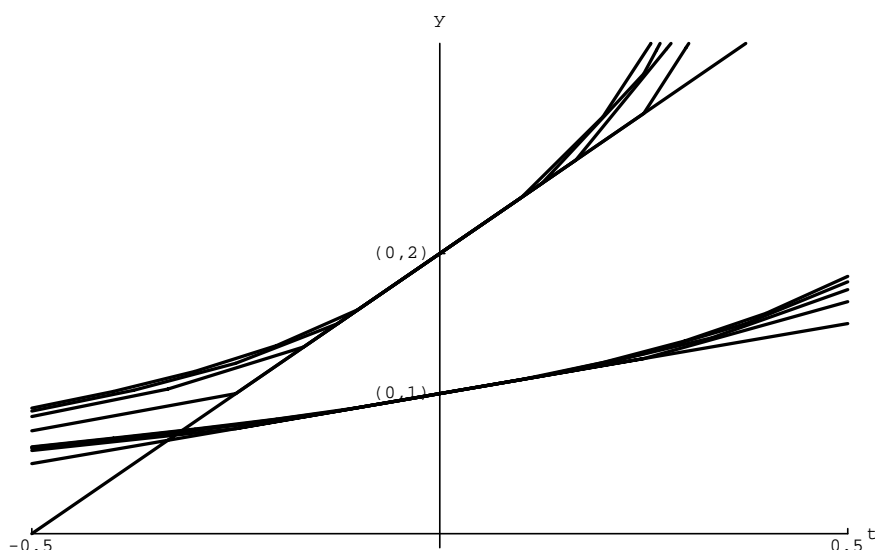


Figura 4.3: Poligonales de Euler para la ecuación $y' = y^2 + t^2$ y empezando en $(0, 1)$ y en $(0, 2)$. Convergen todas en cada caso hacia la única solución del problema de Cauchy.

es decir

$$y(t) = (t + c)^3,$$

a las que hay que añadir

$$y(t) \equiv 0.$$

En consecuencia, son soluciones todas las curvas

$$y(t) = \begin{cases} (t - c_1)^3, & t \leq c_1 \\ 0, & c_1 \leq t \leq c_2 \\ (t - c_2)^3, & t \geq c_2 \end{cases}$$

que podemos ver en la figura 4.4. Por lo tanto, cualquier problema de Cauchy posee infinidad de soluciones. O sea, por cualquier punto (t_0, y_0) pasan infinidad de soluciones. En la mayor parte de los casos el problema de la multiplicidad se arregla quedándonos en un entorno del punto. Sin embargo, por los puntos de la forma $(t_0, 0)$, pasan al menos dos soluciones en cualquier entorno del punto, la $y(t) \equiv 0$ y la $y(t) = (t - t_0)^3$. Las poligonales de Euler para $y(t) = 0$ coinciden siempre con la solución $y(t) \equiv 0$; por lo

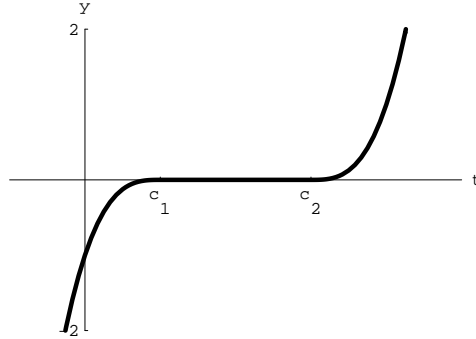


Figura 4.4: Una de las soluciones de la ecuación $y' = 3y^{2/3}$; todas son similares.

tanto, las ‘poligonales de Euler’ no siempre permiten obtener todas las soluciones del problema.

4.3.10 Ejercicios.

1 Compruébese que el teorema de Cauchy-Peano (v. 4.3.7) garantiza que existe una solución del problema

$$\begin{cases} y' = e^{-t^2} + y^3, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

definida en el intervalo $[-1/9, 1/9]$ y valiendo $0 \leq y(t) \leq 2$ en dicho intervalo.

2 Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mu y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

siendo μ un número muy negativo (es decir, con $\mu < 0$ y $|\mu|$ muy grande).

a) Calcúlese la solución del problema. Compruébese que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

b) Calcúlese la poligonal de Euler, $p_h(t)$ con paso $h > 0$ en $[0, +\infty)$. Compruébese que

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_h(t) = y(t).$$

c) Sea $t_j = jh$. Demuéstrese que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} p_h(t_j) = 0$$

si y sólo si $h < -2/\mu$ (o sea, son necesarios valores del paso muy pequeños para que la poligonal de Euler y la solución estén próximos).

3 Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto y $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua. Fijemos $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$; sea

$$R = \{(t, \mathbf{y}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$$

un ‘rectángulo’ contenido en D , y sea r con $0 < r < a$. Supongamos que $\mathbf{y}_n : [t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son aplicaciones continuas, con gráfica contenida en R y que tienen derivada continua a trozos en el intervalo. Decimos que $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *sucesión de soluciones aproximadas* del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

cuando, para cada $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que, si $n \geq n_0$, entonces

$$\|\mathbf{y}_n(t_0) - \mathbf{y}_0\| < \epsilon \quad \text{y} \quad \|y'_n(t) - \mathbf{f}(t, y_n(t))\| < \epsilon$$

en todos los puntos de derivabilidad.

a) Pruébese que las poligonales de Euler forman una sucesión de soluciones aproximadas del problema de Cauchy.

b) Pruébese que, de toda sucesión de soluciones aproximadas del problema de Cauchy, se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$ a una solución del problema.

4 a) Constrúyase una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, continua y valiéndose

$$f(t, y) = \begin{cases} 2t, & y \geq t^2/2, \\ 4t \cos \frac{\pi}{t}, & y = 0, \\ -2t, & y \leq -t^2/2 \end{cases}$$

en los lugares indicados.

b) Compruébese que t^2 y $-t^2$ son soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

c) Sea $n > 2$ un número natural fijo. Se considera el punto

$$\left(\frac{2}{n}, (-1)^n \frac{4}{n^2} \right)$$

y la poligonal de Euler, $p_{(\delta)}(t)$, construida, con paso $\delta > 0$, para la ecuación $y' = f(t, y)$, a partir de dicho punto, es decir

$$p_{(\delta)}\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

y con dicho paso. Demuéstrese que, para δ (dependiente de n) suficientemente pequeño,

$$\left(\forall t \in \left[\frac{2}{n}, 1 \right] \right) \quad |p_{(\delta)}(t) - (-1)^n t^2| < \frac{1}{n^2}.$$

d) Supongamos ahora δ suficientemente pequeño para que se cumpla la desigualdad de arriba. A partir del punto $(0, 0)$, se construye entonces la poligonal de Euler de paso variable sobre las abscisas

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{2}{n} + \delta, \frac{2}{n} + 2\delta, \frac{2}{n} + 3\delta, \dots$$

Denotemos por $p_n(t)$ dicha poligonal. Pruébese que la sucesión $(p_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente. Pruébese que las poligonales pares $p_{2n}(t)$ convergen uniformemente en $[0, 1]$ hacia t^2 , y que las poligonales impares $p_{2n+1}(t)$ convergen uniformemente en $[0, 1]$ hacia $-t^2$.

4.4 Un teorema local de existencia y unicidad de soluciones.

4.4.1 La continuidad de $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ no sirve para garantizar la unicidad de las soluciones. Para ello va a resultar suficiente que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sea ‘lipschitziana’ respecto de \mathbf{y} , propiedad que introducimos a continuación.

4.4.2 Función lipschitziana. Sea D un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} y $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una aplicación $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que \mathbf{f} es *lipschitziana* (o sea, verificando la *propiedad de Lipschitz*) respecto de la variable \mathbf{y} en D cuando existe una constante $L \geq 0$ tal que, si $(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D$ (con el mismo valor de la primera variable), entonces

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$

L recibe el nombre de *constante de Lipschitz*. De nuevo las normas son cualquiera de las normas de \mathbb{R}^{n+1} y \mathbb{R}^n , pero siempre las mismas. Conviene observar que, aunque la propiedad anterior no depende de las normas utilizadas, sí depende la constante de Lipschitz de dichas normas.

4.4.3 Ejemplo. $f(t, y) = y^2$ es lipschitziana respecto de y en cualquier banda $|y| < b$. En efecto,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| |y_1 - y_2| \leq 2b |y_1 - y_2|.$$

Nótese, para lo que después veremos, que $\partial f/\partial y = 2y$ está acotada por $2b$ en dicha banda.

El recinto en que se considere la función es muy importante. Por ejemplo, la función anterior no es lipschitziana en todo \mathbb{R}^2 . Esto se debe a que, en \mathbb{R}^2 , es posible hacer la expresión

$$\frac{|f(t, y_1) - f(t, y_2)|}{|y_1 - y_2|} = |y_1 + y_2|$$

tan grande como se quiera. Nótese también que $\partial f/\partial y = 2y$ no está acotada en \mathbb{R}^2 .

4.4.4 Ejemplo. La función $f(t, y) = 3y^{2/3}$, que hemos manejado en el ejemplo 4.3.9, no es lipschitziana respecto de y en ningún entorno de $(t_0, 0)$, con t_0 arbitrario. En efecto, para $y > 0$, el cociente

$$\frac{|f(t, y) - f(t, 0)|}{|y - 0|} = \frac{3y^{2/3}}{y} = 3y^{-1/3}$$

no se puede acotar en ningún entorno de $(t_0, 0)$.

4.4.5 La relación entre la derivada parcial y la propiedad de Lipschitz, que hemos visto en uno de los ejemplos, no es casual. Esto es lo que afirma la proposición siguiente, que tiene la utilidad de referir una propiedad nueva a otra ya conocida.

PROPOSICIÓN

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} convexo respecto de \mathbf{y} , es decir, tal que, si $(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces

$$(t, \lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2) \in D$$

(o sea el segmento $[(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2)]$ está contenido en D). Supongamos que $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

y que son continuas y acotadas en D . Entonces \mathbf{f} es una función lipschitziana respecto de \mathbf{y} en D .

Sea M una cota para las derivadas parciales $\partial f_i / \partial y_j$ en D . Para t fijo, consideremos las funciones componentes

$$\mathbf{y} \rightarrow f_i(t, \mathbf{y}),$$

definidas en el convexo $D \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n)$. Para $(t, \mathbf{y}_1), (t, \mathbf{y}_2) \in D$, tenemos

$$f_i(t, \mathbf{y}_1) - f_i(t, \mathbf{y}_2) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \tilde{\mathbf{y}}) (y_{1,j} - y_{2,j})$$

para algún punto $\tilde{\mathbf{y}}$ del segmento $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$. Vamos a utilizar en \mathbb{R}^n la norma $\|\cdot\|_\infty$, que recordemos es

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

para el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Empleando esta norma,

$$|f_i(t, \mathbf{y}_1) - f_i(t, \mathbf{y}_2)| \leq n M \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_\infty,$$

luego

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\|_\infty \leq n M \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_\infty,$$

lo que prueba que \mathbf{f} es lipschitziana respecto de \mathbf{y} en D .

4.4.6 Ya hemos dicho antes que el que una función sea lipschitziana depende no sólo de la fórmula de la función, sino del dominio en que esté definida. Se trata de una propiedad global en la que tenemos que comparar todo par de puntos con la misma primera componente. La proposición 4.4.5 convierte esta propiedad en consecuencia de otra propiedad global, la de acotación de las derivadas parciales en todo el abierto. Lo que también posee sentido (y es útil) es pedir que la propiedad de Lipschitz se verifique de forma local, o sea, en un entorno de cada punto. Esta es una condición menos exigente que pasamos a estudiar a continuación.

4.4.7 Función localmente lipschitziana. Sea D un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} y $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una aplicación $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que \mathbf{f} es *localmente lipschitziana* respecto de la variable \mathbf{y} en D cuando para todo punto $(t, \mathbf{y}) \in D$ existe un entorno U de (t, \mathbf{y}) tal que \mathbf{f} es lipschitziana en U .

4.4.8 Ejemplo. $f(t, y) = y^2$ es ahora localmente lipschitziana respecto de y en todo \mathbb{R}^2 , puesto que cada punto del plano admite un entorno contenido en una banda $|y| < b$, donde la función es lipchitziana.

4.4.9 Ejemplo. La función $f(t, y) = 3y^{2/3}$, que hemos manejado en los ejemplos 4.3.9 y 4.4.4, no es localmente lipschitziana respecto de y en ningún entorno de $(t_0, 0)$, con t_0 arbitrario, porque no es lipschitziana en ningún entorno de ninguno de dichos puntos, como ya vimos.

4.4.10 La relación entre las derivadas parciales y la propiedad local de Lipschitz es ahora la siguiente:

PROPOSICIÓN

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

y que son continuas en D . Entonces \mathbf{f} es una función localmente lipschitziana respecto de \mathbf{y} en D .

Sea $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$. Tomemos un disco, U , con centro en dicho punto y tal que

$$U \subset \bar{U} \subset D$$

(aquí \bar{U} es la adherencia de U , o sea, el disco cerrado). Las derivadas parciales, $\partial f_i / \partial y_j$, que son continuas en D , son acotadas en \bar{U} , luego en U . Por lo tanto la función es lipschitziana en U .

4.4.11 El resultado que sigue recibe el nombre de *desigualdad de Gronwall* y vamos a presentarlo en dos versiones de dificultad decreciente. De hecho no se aplicará en su versión más potente hasta el final del capítulo, por lo que ahora puede servir a alguno más de distracción que de ayuda. Por el momento es únicamente necesaria una versión sencilla de la desigualdad, que es la que cita el segundo apartado del corolario que sigue al lema.

La desigualdad de Gronwall permite substituir una inecuación integral (a la que se llega a menudo al emplear la forma integral del problema de Cauchy) por una acotación de la solución.

4.4.12 LEMA (desigualdad de Gronwall)

Sean $u, k, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones reales definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , con $k(t) \geq 0$ en $[a, b]$. Supondremos que, para todo $t \in [a, b]$, se cumple

$$u(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) u(s) ds .$$

Entonces, para todo $t \in [a, b]$,

$$u(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s) k(s) \exp\left(\int_s^t k(r) dr\right) ds .$$

La desigualdad del enunciado se escribe

$$u(s) - \int_a^s k(r) u(r) dr \leq g(s) ;$$

Multiplicada por

$$k(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right)$$

(que es igual o mayor que 0) resulta

$$\left(u(s) - \int_a^s k(r) u(r) dr\right) k(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) \leq g(s) k(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) .$$

Es decir, llamando

$$m(s) = \int_a^s k(r) u(r) dr ,$$

con lo que

$$m'(s) = k(s) u(s)$$

y

$$m(a) = 0 ,$$

tenemos

$$\frac{d}{ds} \left[m(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) \right] \leq g(s) k(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) .$$

Integrando ahora entre a y t (con lo que la desigualdad se conserva),

$$m(t) \exp\left(-\int_a^t k(r) dr\right) \leq \int_a^t g(s) k(s) \exp\left(-\int_a^s k(r) dr\right) ds ,$$

es decir,

$$m(t) \leq \int_a^t g(s) k(s) \exp\left(\int_s^t k(r) dr\right) ds.$$

Finalmente, volviendo a la desigualdad del enunciado,

$$u(t) \leq g(t) + m(t) \leq g(t) + \int_a^t g(s) k(s) \exp\left(\int_s^t k(r) dr\right) ds,$$

o sea, lo que pretendíamos demostrar.

4.4.13 Un argumento similar al anterior o, simplemente, un cambio de signo en la variable t , permite comprobar que, en un intervalo $[b, a]$ a la izquierda de a , si

$$u(t) \leq g(t) + \int_t^a k(s) u(s) ds,$$

entonces,

$$u(t) \leq g(t) + \int_t^a g(s) k(s) \exp\left(\int_t^s k(r) dr\right) ds$$

para $t \in [b, a]$, lo que permite obtener una acotación de la función $u(t)$ en los instantes anteriores de tiempo.

4.4.14 COROLARIO

a) Sean $u(t)$ y $k(t)$ dos funciones reales definidas y continuas en un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} . Supondremos, además que $k(t) \geq 0$ en dicho intervalo, y que, para todo $t \in [a, b]$, se cumple

$$u(t) \leq c + \int_a^t k(s) u(s) ds$$

para una constante real c . Entonces,

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_a^t k(s) ds\right).$$

b) Sea $u(t)$ una función real, continua y positiva en un intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} . Supondremos, además, que, para todo $t \in [a, b]$, se cumple

$$u(t) \leq L \int_a^t u(s) ds$$

para una constante $L \geq 0$. Entonces,

$$u(t) \equiv 0.$$

a) Basta utilizar la desigualdad final del lema precedente para $g(t) \equiv c$, sin olvidar que, donde aparece

$$k(s) \exp \left(\int_s^t k(r) dr \right),$$

lo que se tiene es la derivada de la función de s

$$- \exp \left(\int_s^t k(r) dr \right).$$

b) De nuevo consiste en utilizar el apartado precedente para la función $k(t) \equiv L$ y para $c = 0$. Con él se prueba sin dificultad que $u(t) \leq 0$ en $[a, b]$. Como, por otra parte, $u(t)$ es positiva en el intervalo, se obtiene la conclusión.

4.4.15 Nótese que las mismas desigualdades del corolario pueden probarse en un intervalo $[b, a]$ a la izquierda de a . Para el primer apartado, hay que cambiar la desigualdad de la hipótesis por

$$u(t) \leq c + \int_t^a k(s) u(s) ds,$$

y lo que se obtiene es que

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_t^a k(s) ds \right).$$

Para el segundo hay que cambiar la hipótesis

$$u(t) \leq L \int_a^t u(s) ds$$

por

$$u(t) \leq L \int_t^a u(s) ds,$$

y se obtiene la misma conclusión.

4.4.16 El que sigue es un teorema como el de Cauchy-Peano, pero, además, afirma la unicidad de la solución del problema de Cauchy en un 'pequeño' entorno alrededor de los datos iniciales.

TEOREMA (Picard-Lindelöf)

Supongamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función continua y lipschitziana respecto de \mathbf{y} en un entorno, D , de (t_0, \mathbf{y}_0) . Entonces, existe

un intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ alrededor de t_0 y una función, $\mathbf{y}(t)$, definida en él y con gráfica contenida en D , de tal manera que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, que $\mathbf{y}(t)$ es derivable en $[t_0 - r, t_0 + r]$ y que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

en dicho intervalo.

Si el 'rectángulo'

$$R = \{(t, \mathbf{y}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$$

está contenido en D y

$$M = \max_{(t, \mathbf{y}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|,$$

entonces se puede tomar

$$r = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Además, si $\mathbf{z}(t)$ es otra solución del problema de Cauchy, entonces coincide con $\mathbf{y}(t)$ (en el intervalo en el que $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ estén ambas definidas).

Utilizaremos en \mathbb{R}^n una norma vectorial cualquiera. Consideremos el intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$, con r como ha sido definido más arriba. Elegimos en el intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$ cualquier función, $\mathbf{g}_0(t)$, continua y con gráfico contenido en R . Lo más normal es tomar

$$\mathbf{g}_0(t) = \mathbf{y}_0,$$

pero se puede elegir otra opción. A continuación, definimos por inducción

$$\mathbf{g}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) ds$$

sin muchos inconvenientes, puesto que se trata de integrales sobre intervalos compactos de funciones continuas. El único problema es la comprobación de que las gráficas de las funciones $\mathbf{g}_n(t)$ están contenidas en R , a su vez contenido en D , que es donde está definida \mathbf{f} . Esto es relativamente sencillo, ya que lo cumple \mathbf{g}_0 por definición y, si lo cumple \mathbf{g}_k , entonces

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(t) - \mathbf{y}_0\| \leq M |t - t_0| \leq M r \leq b,$$

luego también lo cumple \mathbf{g}_{k+1} .

Las funciones $\mathbf{g}_k(t)$ se denominan ‘iteradas de Picard’ generadas a partir de $\mathbf{g}_0(t)$. Veremos luego el papel efectivo que juegan a la hora de aproximar la solución. Veamos por ahora que convergen uniformemente (o sea en $\mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{C}^n)$) hacia una función continua en $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Denotemos

$$C = \max_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} \|\mathbf{g}_1(t) - \mathbf{g}_0(t)\|$$

y denotemos por L la constante de Lipschitz de \mathbf{f} . Ocurre que

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(t) - \mathbf{g}_k(t)\| \leq C \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!}.$$

En efecto, eso es lo que ocurre para $k = 0$, por definición de C . Si se supone cierto para $k - 1$, entonces, para k ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_{k+1}(t) - \mathbf{g}_k(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{g}_{k-1}(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|\mathbf{g}_k(s) - \mathbf{g}_{k-1}(s)\| ds \\ &\leq C L^k \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^{k-1}}{(k-1)!} ds = C L^k \frac{(t - t_0)^k}{k!}, \end{aligned}$$

esto si $t_0 \leq t$; si $t \leq t_0$ el único cambio es $\int_t^{t_0}$ por $\int_{t_0}^t$. Como

$$C \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \leq C \frac{L^k r^k}{k!}$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} C \frac{L^k r^k}{k!} = C e^{Lr},$$

el criterio M de Weierstrass permite afirmar que la serie

$$\mathbf{g}_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{g}_{k+1}(t) - \mathbf{g}_k(t)),$$

cuya suma parcial es $\mathbf{g}_k(t)$, converge absoluta y uniformemente hacia una función continua, $\mathbf{y}(t)$, en $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Ahora bien, de que $\mathbf{g}_k \rightarrow \mathbf{y}$ uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$ y de que

$$\|\mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\| \leq L \|\mathbf{g}_k(s) - \mathbf{y}(s)\|,$$

se deduce que también

$$\mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) \longrightarrow \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))$$

uniformemente en $[t_0 - r, t_0 + r]$, luego que

$$\int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) ds \longrightarrow \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds.$$

Como

$$\mathbf{g}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) ds,$$

obtenemos así que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds,$$

luego $\mathbf{y}(t)$ es solución en $[t_0 - r, t_0 + r]$ de la ecuación diferencial y de la condición inicial (forma integral del problema de Cauchy).

En lo que respecta a la unicidad, si $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ son soluciones en un intervalo conteniendo a t_0 , entonces, como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds, \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s)) ds,$$

se tiene, cuando $t_0 \leq t$, que

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s))\| ds \leq L \int_{t_0}^t \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{z}(s)\| ds$$

(cuando $t \leq t_0$ el cambio es $\int_t^{t_0}$ por $\int_{t_0}^t$). Aplicando entonces la desigualdad de Gronwall en su versión 4.4.14 a $u(t) = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\|$, o la correspondiente para $t \leq t_0$, resulta que $\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = 0$, lo que prueba la unicidad.

4.4.17 Obsérvese que las condiciones del teorema precedente incluyen las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano. En dichas condiciones, disponemos pues de dos vías para obtener la solución del problema de Cauchy (en realidad, estos caminos poseen más interés teórico que práctico).

La primera vía es la de las *poligonales de Euler*. En principio, sólo una subsucesión converge hacia la solución, pero se puede comprobar que, cuando la solución del problema de Cauchy es única, la sucesión completa de poligonales de Euler es convergente y su límite es dicha solución. Estas poligonales son, sobre todo, un método numérico y gráfico. Su fórmula de construcción se puede convertir fácilmente en un método numérico (conocido como método ‘de Euler’), pero su convergencia es lenta.

El otro camino es el de las *iteradas de Picard*, definidas a partir de $\mathbf{g}_0(t)$ como

$$\mathbf{g}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{g}_k(s)) ds.$$

Estas iteradas convergen uniformemente en un intervalo hacia la solución. Las iteradas de Picard tienen el problema de requerir integraciones de dificultad creciente. Cuando en ellas aparecen los términos sucesivos de una sucesión de funciones con límite conocido, permiten obtener la fórmula exacta de la solución, pues dicho límite es solución del problema de Cauchy.

4.4.18 Ejemplo. Para el problema de Cauchy

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

las iteradas de Picard se obtienen a partir de $g_0(t) \equiv 1$ como

$$g_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t g_k(s) ds,$$

y resultan ser

$$g_0(t) \equiv 1,$$

$$g_1(t) = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$g_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

etc. y, en general,

$$g_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^k}{k!}.$$

Lo que se obtiene así es el desarrollo alrededor de 0 de la función $y(t) = e^t$, que es la solución del problema, como se comprueba sin dificultad.

4.4.19 Ejemplo. Para el problema de Cauchy

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o sea,

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2, & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= y_1, & y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

las iteradas de Picard se obtienen a partir de $\mathbf{g}_0(t) \equiv (1, 0)^T$ como

$$\mathbf{g}_{k+1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{g}_k(s) ds,$$

y resultan ser

$$\mathbf{g}_0(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t 0 ds \\ \int_0^t ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t -s ds \\ \int_0^t 1 ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t -s ds \\ \int_0^t (1 - \frac{s^2}{2}) ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t - \frac{t^3}{6} \end{bmatrix},$$

etc. y así, va resultando el desarrollo en serie alrededor de $\mathbf{0}$ de la función

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sen t \end{bmatrix},$$

que es la solución del problema, como se comprueba sin dificultad.

4.4.20 Ejercicios.

1 Considérese una aplicación $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida y continua en un abierto, D , de \mathbb{R}^{n+1} .

a) Pruébese que, si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(D)$ y

$$\sup_{(t, \mathbf{y}) \in D} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \right\| = +\infty$$

para una norma matricial, entonces \mathbf{f} no es lipschitziana respecto de \mathbf{y} en D .

b) Sea $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$. Pruébese que, si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(D - \{(t_0, \mathbf{y}_0)\})$ y

$$\limsup_{(t, \mathbf{y}) \rightarrow (t_0, \mathbf{y}_0)} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}) \right\| = +\infty$$

para una norma matricial, entonces \mathbf{f} no es localmente lipschitziana respecto de \mathbf{y} en (t_0, \mathbf{y}_0) .

2 Pruébese que el propio teorema de Picard-Lindelöf (v. 4.4.16) garantiza ya, para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2 + e^{-y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

una única solución definida en todo \mathbb{R} (y que luego llamaremos maximal). Se verá después un teorema (v. 4.5.26) que tiene este hecho como consecuencia trivial.

3 Calcúlese, por el método de las iteradas de Picard, la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t}, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

en un entorno de 1.

4 Calcúlense las iteradas de Picard para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

y su solución.

5 a) Se considera una función $f(t, y)$ de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , definida y continua en una banda $[a, b] \times \mathbb{R}$. Para cada $t \in [a, b]$ se considera la función separada

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow f(t, y). \end{aligned}$$

Se supone que existe un $t_0 \in [a, b]$ tal que

- para $t \geq t_0$, f_t es decreciente,
- para $t \leq t_0$, f_t es creciente.

Pruébese entonces que, si $y(t), z(t)$ son soluciones en un intervalo común del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y_0, & (t_0 \text{ es el de antes}) \end{cases}$$

entonces $y(t) = z(t)$ en dicho intervalo.

b) Consideremos la función $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f(t, y) = \begin{cases} 2t & \text{si } y \leq 0, \\ -2t & \text{si } y \geq t^2, \\ \lambda 2t + (1 - \lambda)(-2t) & \text{si } 0 < y < t^2 \end{cases} \quad \text{e } y = \lambda 0 + (1 - \lambda)t^2,$$

y el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & (t, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Utilícese el apartado precedente para probar que el problema de Cauchy admite una única solución.

c) Calcúlense para el problema del apartado precedente las iteradas de Picard a partir de $g_0(t) \equiv 0$. Pruébese que las iteradas impares valen todas t^2 y que las iteradas pares valen todas $-t^2$ y que ninguna de las dos funciones es solución de la ecuación.

d) Compruébese que la anterior función $f(t, y)$ no es lipschitziana en ningún entorno de $(0, 0)$.

4.5 Teoremas globales de existencia y unicidad.

4.5.1 La aplicación directa de los teoremas 4.3.7 y 4.4.16 garantiza la existencia de solución para la ecuación en un pequeño entorno alrededor de los datos iniciales. Sin embargo, en muchos casos, nos encontramos con que estas soluciones existen e interesan en intervalos mayores.

4.5.2 Ejemplo. El problema

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(1) = -1, \end{cases}$$

cuya ecuación fue presentada en 1.1.18 y en 1.2.9, cumple las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf en todo dominio acotado para la variable y . Consideremos un rectángulo contenido en uno de ellos

$$R = \{(t, y) \mid |t - 1| \leq a, |y + 1| \leq b\}$$

con centro en $(1, -1)$, y el máximo

$$M = \max_{(t, y) \in R} |f(t, y)| = \max_{(t, y) \in R} y^2 = (b + 1)^2.$$

Con este rectángulo, el teorema de Picard-Lindelöf asegura una (única) solución del problema en el intervalo de centro 1 y de radio

$$r = \min \left(a, \frac{b}{(b+1)^2} \right).$$

El máximo para la función $b/(b+1)^2$ es $1/4$ y se alcanza para $b = 1$. Si $a \geq 1/4$, entonces $r \leq 1/4$, y si $a < 1/4$, entonces $r < 1/4$. Por lo tanto, la cantidad $r = 1/4$ es la mejor que admite el teorema y $[3/4, 5/4]$ el mejor intervalo alrededor de $t_0 = 1$. Sin embargo, integrando la ecuación como hicimos en 1.2.9 y ajustando la constante, vemos que la función

$$y(t) = -\frac{1}{t}$$

es solución, pasa por $(1, -1)$ y está definida en $(0, \infty)$.

Por otra parte, esta solución no puede extenderse a la izquierda de 0, a pesar de que la función $f(t, y) = y^2$ no presenta en $t = 0$ ninguna anomalía.

Nótese que, en el concepto de solución, interviene tanto la fórmula que define una función como el intervalo en el que esa fórmula se aplica. Así, por ejemplo, la fórmula

$$y(t) = -\frac{1}{t}$$

define soluciones distintas según se la considere en $[3/4, 5/4]$ o en $(0, \infty)$. La segunda solución amplía la información contenida en la primera. Ello sugiere la definición siguiente.

4.5.3 Prolongación de soluciones. Solución maximal. Sean $\mathbf{y}_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones. Decimos que \mathbf{y}_2 es una *prolongación* de \mathbf{y}_1 , o que \mathbf{y}_2 *prolonga* a \mathbf{y}_1 cuando $I_1 \subset I_2$ e $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$ en I_1 . Cuando \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 son soluciones de una ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, se dice que *la solución \mathbf{y}_2 prolonga a la solución \mathbf{y}_1* .

Decimos que una solución es *maximal* cuando no existe ninguna otra solución que la prolongue. Del intervalo en que está definida una de estas soluciones maximales diremos que es un *intervalo maximal*.

4.5.4 Es obvio que estamos interesados en soluciones definidas en el intervalo más grande posible. Comprobaremos a continuación que toda solución se puede prolongar hasta una solución maximal, de modo que serán estas las únicas que consideremos.

Representamos las soluciones del conjunto de soluciones de una ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ por (I, \mathbf{y}) , donde $\mathbf{y}(t)$ es la solución e I el intervalo en

que está definida. Sea (I_0, \mathbf{y}_0) una solución; queremos comprobar que se puede prolongar hasta una solución maximal. Consideraremos únicamente el conjunto de las soluciones que prolongan a ésta, entre las que se encuentra obviamente ella misma. En este conjunto definimos la relación de orden ‘prolongación’, o sea

$$(I_1, \mathbf{y}_1) \leq (I_2, \mathbf{y}_2) \quad \text{cuando} \quad I_1 \subset I_2 \quad \text{y} \quad (\forall t \in I_1) \quad \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$$

(lo que significa exactamente que \mathbf{y}_2 es una prolongación de \mathbf{y}_1). Se trata evidentemente de una relación de orden parcial en el conjunto de las soluciones que prolongan a (I_0, \mathbf{y}_0) .

Toda *cadena*, o sea, todo subconjunto totalmente ordenado, admite cota superior. En efecto, si $(I_j, \mathbf{y}_j)_{j \in J}$ es una de estas cadenas, la función definida en el intervalo $I = \cup_{j \in J} I_j$ por $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_j(t)$ para $t \in I_j$ es una solución que prolonga todas las de la cadena. La función está bien definida, puesto que, si t pertenece a dos intervalos I_i e I_j , entonces uno de estos intervalos está contenido en el otro e $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}_j(t)$. La función $\mathbf{y}(t)$ es solución de la ecuación, puesto que coincide en un entorno de cada punto (o semientorno, si se trata de un punto extremo de I) con una solución. Finalmente, $\mathbf{y}(t)$ prolonga a $\mathbf{y}_0(t)$, pues la prolongan todas las $\mathbf{y}_j(t)$ a las que prolonga a su vez $\mathbf{y}(t)$. Por lo tanto, (I, \mathbf{y}) es una cota superior de la cadena.

Según el lema de Zorn (que el lector deberá recordar de sus estudios de Cálculo), existen elementos maximales en el conjunto de soluciones que prolongan a (I_0, \mathbf{y}_0) . Cada uno de estos maximales es obviamente una prolongación maximal de la solución (I_0, \mathbf{y}_0) .

En el ejercicio 1 se propone un proceso constructivo para obtener soluciones maximales basado en la aplicación repetida del teorema de Cauchy-Peano y, por tanto, independiente del lema de Zorn.

4.5.5 Asociados al proceso de prolongación, aparecen algunos problemas evidentes a los que intentaremos responder a continuación. El primero de ellos es el de la unicidad de soluciones que ya hemos considerado de forma local. De alguna manera parece posible que un problema de Cauchy que en el punto inicial posee solución única se bifurque posteriormente a dos o más soluciones diferentes. De hecho, la segunda parte (unicidad) del teorema de Picard-Lindelöf nos dice ya que tal cosa no es posible cuando las hipótesis de teorema están presentes. Claro que hay muchos casos en que no se aplica este teorema. En esos casos existen diferentes soluciones maximales de un mismo problema. Es lo que vimos en el ejemplo 4.3.9, donde, para una condición inicial del tipo $(t_0, 0)$ existían infinidad de soluciones maximales

definidas en $(-\infty, \infty)$; o lo que podemos ver en el ejercicio 4, donde no sólo hay diversas soluciones maximales del mismo problema de Cauchy, sino que, además, poseen diferentes intervalos maximales.

4.5.6 Puntos de unicidad. Consideremos la ecuación

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

definida mediante una función continua $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1} . Sea (t_0, \mathbf{y}_0) un punto de D .

Decimos que (t_0, \mathbf{y}_0) es un *punto regular* o de *unicidad global* de la ecuación cuando existe una solución maximal única con $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Decimos que (t_0, \mathbf{y}_0) es un punto de *unicidad local* de la ecuación cuando existe $r > 0$ tal que dos soluciones cualesquiera de la ecuación con $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, definidas en el intervalo $[t_0 - r, t_0 + r]$, coinciden en dicho intervalo.

Decimos que (t_0, \mathbf{y}_0) es un punto *singular* de la ecuación cuando no es de unicidad local.

Lo que se tiene obviamente es que la unicidad global implica la unicidad local, pero puede haber puntos con unicidad local sin unicidad global, como vemos en uno de los ejemplos que siguen.

4.5.7 Ejemplo. Para la ecuación

$$y' = y^2,$$

que ya ha sido abordada en 4.5.2, todos los puntos son regulares. La causa es que la función $f(t, y) = y^2$ es localmente lipschitziana en el plano, como vimos en el ejemplo 4.4.8.

4.5.8 Ejemplo. Por el contrario, para la ecuación

$$y' = 3y^{2/3},$$

presentada en el ejemplo 4.3.9, ningún punto es regular o de unicidad global. Sin embargo, los puntos (t_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ son de unicidad local. Los puntos $(t_0, 0)$ son singulares.

4.5.9 PROPOSICION

Si todo punto de D es de unicidad local, entonces todo punto de D es de unicidad global.

La idea de la demostración se resume en una frase: si dos soluciones se separan, deben separarse en algún punto.

Veamos que, si existe un punto que no es de unicidad global (no es regular), entonces hay un punto que no es de unicidad local. En efecto, supongamos que (t_0, \mathbf{y}_0) no es regular. Sean entonces $\mathbf{y}_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones pasando por (t_0, \mathbf{y}_0) y diferentes en algún punto t_1 . Supongamos que $t_0 < t_1$ y pongamos

$$t_2 = \inf\{t \mid t \geq t_0, \mathbf{y}_1(t) \neq \mathbf{y}_2(t)\}.$$

Entonces $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$ para $t_0 \leq t < t_2$ y, por continuidad, $\mathbf{y}_1(t_2) = \mathbf{y}_2(t_2)$. Sin embargo, el punto $(t_2, \mathbf{y}_1(t_2)) = (t_2, \mathbf{y}_2(t_2))$ no es de unicidad local ya que existen puntos tan próximos como se quiera a t_2 donde $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ son diferentes.

4.5.10 Por lo tanto, si una ecuación no tiene puntos singulares (sin unicidad local) entonces todos sus puntos son regulares (con unicidad global). La no existencia de puntos singulares puede garantizarse mediante las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf. Es lo que demostramos en el resultado siguiente, en el que mezclamos también la condición suficiente sobre las derivadas parciales.

4.5.11 PROPOSICION

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} y sea $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una función $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ que supondremos continua.

a) Si \mathbf{f} es una función localmente lipschitziana en D , entonces todo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

para (t_0, \mathbf{y}_0) contenido en D admite una única solución maximal.

b) Si \mathbf{f} admite derivadas parciales $\partial f_i / \partial y_j$ continuas en D , entonces todo problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

para (t_0, \mathbf{y}_0) contenido en D admite una única solución maximal.

En el primer caso, todo punto de D es de unicidad local (v. 4.4.16), por lo que se obtiene la conclusión. El segundo caso implica el primero (v. 4.4.10).

4.5.12 Ahora nos vamos a preguntar cosas más concretas sobre el intervalo maximal, o sea, cómo es de grande dicho intervalo, es decir, hasta dónde se puede prolongar una solución. La respuesta a este problema no es cuantitativa; esto quiere decir que no existe una fórmula que nos dé los extremos del intervalo maximal. Una de las pocas afirmaciones de carácter general que pueden hacerse se refiere a los sistemas lineales y dice que el intervalo maximal es el de continuidad de los coeficientes. Pero por ahora vamos a conformarnos con descubrir los síntomas que indican que nos aproximamos a los extremos del intervalo maximal.

Comenzaremos por aprender a empalmar dos soluciones, para poder construir así soluciones mayores.

4.5.13 LEMA (empalme de soluciones)

Si $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ son soluciones de la ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ definidas en intervalos $[a, t_0]$ y $[t_0, b]$, y además $\mathbf{y}_1(t_0) = \mathbf{y}_2(t_0)$, entonces la función $\mathbf{y}(t)$ definida en $[a, b]$ como

$$\mathbf{y}(t) = \begin{cases} \mathbf{y}_1(t), & t \in [a, t_0] \\ \mathbf{y}_2(t), & t \in [t_0, b] \end{cases}$$

es solución de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ en $[a, b]$.

Se trata de una función que es, evidentemente, continua. Además, sus derivadas laterales en t_0 coinciden, luego es derivable en todo $[a, b]$. Su derivada vale $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1(t))$ en el primer subintervalo, $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t))$ en el segundo, y $\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_1(t_0)) = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_2(t_0))$ en t_0 , luego es solución en todo el intervalo.

4.5.14 NOTA sobre la representación de intervalos. En general vamos a representar por $\{a, b\}$ un intervalo de extremos a, b , sin especificar si a y b son finitos o infinitos y sin precisar si el intervalo es abierto o cerrado por a y b . En otras palabras, $\{a, b\}$ será uno de los intervalos $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ o (a, b) .

4.5.15 Es fácil comprobar que, si $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una ecuación, \mathbf{f} es continua, D es un abierto e $\mathbf{y} : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución maximal, entonces el intervalo $\{a, b\}$ es el intervalo abierto (a, b) . En efecto, si por ejemplo b fuese un punto del intervalo de la solución $\mathbf{y}(t)$, consideraríamos una solución pasando por $(b, \mathbf{y}(b))$, que se puede obtener aplicando el teorema de Cauchy-Peano, y la empalmaríamos en dicho punto a $\mathbf{y}(t)$ con lo que conseguiríamos una solución prolongando estrictamente a $\mathbf{y}(t)$, y ésta no sería maximal.

Por esta misma razón, las soluciones dadas en un abierto por los teoremas locales de Cauchy-Peano y de Picard-Lindelöf son siempre prolongables en ambos extremos.

4.5.16 La prolongación y las soluciones maximales se pueden tratar separadamente en los dos extremos del intervalo. En ese sentido tiene fundamento hablar de *soluciones maximales a la izquierda* y *soluciones maximales a la derecha* como soluciones que no se pueden prolongar a la izquierda o a la derecha.

Cuando se tiene una solución maximal a la izquierda y otra solución maximal a la derecha pasando ambas por un mismo punto, el empalme de ambas en dicho punto constituye una solución maximal (a ambos lados).

Estudiaremos a continuación el comportamiento de una solución cuando la variable se aproxima al extremo superior del intervalo maximal. Es evidente que los mismos resultados y demostraciones son ciertos para el extremo inferior.

4.5.17 LEMA (Witner)

Supongamos que D es un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , que $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y que $\mathbf{y} : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Sea (b, \mathbf{z}) un punto de \mathbb{R}^{n+1} (no necesariamente contenido en D). Supondremos que el punto (b, \mathbf{z}) verifica las siguientes propiedades:

- (w1) el punto (b, \mathbf{z}) es un punto límite de la gráfica de $\mathbf{y}(t)$ cuando $t \rightarrow b^-$, lo que significa uno de los dos enunciados equivalentes siguientes:
- en todo entorno de (b, \mathbf{z}) existen puntos $(t, \mathbf{y}(t))$ con $t \in \{a, b\}$,
 - existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\{a, b\}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t_n) = \mathbf{z}$;

(w2) \mathbf{f} admite una prolongación continua a un rectángulo de la forma $[b-h, b] \times \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \leq h\}$ para algún $h > 0$ (siendo la norma una cualquiera en \mathbb{R}^n).

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{y}(t) = \mathbf{z}$$

(o sea, existe el límite y es \mathbf{z}).

La segunda de las condiciones precedentes se cumple automáticamente cuando $(b, \mathbf{z}) \in D$ ya que entonces existe un rectángulo centrado en (b, \mathbf{z}) y contenido en D y \mathbf{f} es continua en D . Sin embargo, esto no sucede necesariamente. Lo que se exige es que \mathbf{f} se pueda prolongar continuamente a un pequeño recinto que contenga también la abscisa b .

Vamos a utilizar la norma $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^n . Consideremos el rectángulo $R = [b-h, b] \times \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_\infty \leq h\}$ al que \mathbf{f} se puede prolongar continuamente. Es posible que el rectángulo del enunciado no emplee la norma $\|\cdot\|_\infty$, pero en cualquier caso hay también un rectángulo con esta norma que lo cumple. Tomemos el máximo

$$M = \max_{(t, \mathbf{y}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|_\infty.$$

Recordemos que existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de (a, b) con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t_n) = \mathbf{z}$. Digamos que nuestro propósito es demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{y}(t) = \mathbf{z}.$$

Sea entonces $\epsilon > 0$. Debemos probar que, para un α determinado, se verifica $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}\|_\infty \leq \epsilon$ para $t \in (\alpha, b)$.

Para la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$,

$$b - t_n \leq \min\left(\frac{\epsilon}{2M}, \frac{h}{4M}\right) \quad \text{y} \quad \|\mathbf{z} - \mathbf{y}(t_n)\|_\infty \leq \min\left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{h}{4}\right).$$

Evidentemente $(t_{n_0}, \mathbf{y}(t_{n_0}))$ está dentro de R . Consideremos los valores posteriores de t en los que la curva $\mathbf{y}(t)$ está siempre en R , es decir, consideremos cada punto $t' \in (t_{n_0}, b)$ tal que

$$(\forall t \in [t_{n_0}, t']) \quad (t, \mathbf{y}(t)) \in R,$$

y el extremo superior t_0 de tales puntos. Puede ser que $t_0 = b$ o que $t_0 < b$. Si $t_0 < b$, t_0 se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

- para $t \in [t_{n_0}, t_0]$, $(t, \mathbf{y}(t)) \in R$,
- existen puntos por encima de t_0 y arbitrariamente próximos a t_0 tales que $(t, \mathbf{y}(t))$ no está en R .

Nuestro objetivo es ahora doble. En primer lugar, probar que $t_0 = b$. En segundo lugar, probar que $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0^- = b^-$. Cuando $t \in (t_{n_0}, t_0)$, el teorema del valor medio para cada componente $y_j(t)$ de $\mathbf{y}(t)$ hace que

$$\begin{aligned} |y_j(t) - y_j(t_{n_0})| &= |y_j'(\xi)| |t - t_{n_0}| = |f_j(\xi, \mathbf{y}(\xi))| |t - t_{n_0}| \\ &\leq M(b - t_{n_0}) \leq \min\left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{h}{4}\right), \end{aligned}$$

luego, para la norma $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_{n_0})\|_\infty \leq \min\left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{h}{4}\right).$$

Se sigue entonces que

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}\|_\infty \leq \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_{n_0})\|_\infty + \|\mathbf{y}(t_{n_0}) - \mathbf{z}\|_\infty \leq \min\left(\epsilon, \frac{h}{2}\right),$$

y esto para $t \in (t_{n_0}, t_0)$ arbitrario.

Pensemos en primer lugar que $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}\|_\infty \leq h/2$; esto significa que, para (t_{n_0}, t_0) , la curva solución permanece en R , y lejos del borde superior. Por consiguiente, t_0 no es una abscisa de salida por arriba de R (salida de la curva solución), y, por lo tanto, por continuidad de la solución, no puede darse la segunda condición de las que se cumplen cuando $t_0 < b$. Es decir, $t_0 = b$.

Por otra parte tenemos que, para $t \in (t_{n_0}, t_0 = b)$, $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}\|_\infty \leq \epsilon$ (con ϵ fijado arbitrariamente), que es la desigualdad que estábamos buscando, luego

$$\lim_{t \rightarrow t_0^- = b^-} \mathbf{y}(t) = \mathbf{z}.$$

Esto termina la demostración.

4.5.18 El teorema que sigue afirma que la prolongación maximal de una solución llega hasta la ‘frontera’ del dominio D de definición de la ecuación. Una pequeña consideración sobre la frontera de un conjunto. La definición de la *frontera* de D es

$$\text{Fr } D = \overline{D} \cap \overline{C D}$$

(La raya en \overline{D} y \overline{CD} significa la ‘adherencia’ y la C el ‘conjunto complementario’). Lo fundamental del conjunto frontera es que sus puntos son a la vez límites de sucesiones de D y límites de sucesiones de CD .

Si para un conjunto no acotado se considera que el ‘punto del infinito’ está también en su frontera, la idea de que las soluciones maximales llegan hasta la frontera del conjunto tiene también sentido en estos casos.

4.5.19 TEOREMA

Sea $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ con $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua definida en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1} . Sea $\mathbf{y} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución maximal de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Entonces:

a) Si $b < +\infty$ y (b, \mathbf{z}) es un punto límite de la gráfica de $\mathbf{y}(t)$ cuando $t \rightarrow b^-$ (lo que, recordemos, significa que en todo entorno de (b, \mathbf{z}) existen puntos $(t, \mathbf{y}(t))$ con $t \in (a, b)$), entonces $(b, \mathbf{z}) \in \text{Fr } D$.

b) Si $a > -\infty$ y (a, \mathbf{z}) es un punto límite de la gráfica de $\mathbf{y}(t)$ cuando $t \rightarrow a^+$, entonces $(a, \mathbf{z}) \in \text{Fr } D$.

c) Si K es un compacto contenido en D , entonces existen a' y b' con $a < a'$ y $b > b'$ tales que la gráfica $(t, \mathbf{y}(t))$ pertenece a $D - K$ para $t \in (a, a')$ y para $t \in (b', b)$. Es decir, la gráfica se sale de cualquier compacto contenido en D .

a) Si (b, \mathbf{z}) es punto límite de la gráfica de $\mathbf{y}(t)$, entonces $(b, \mathbf{z}) \in \overline{D} = D \cup \text{Fr } D$. Si $(b, \mathbf{z}) \in D$, entonces, según el lema precedente, $\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{y}(t) = \mathbf{z}$. Pero

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{y}'(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \mathbf{f}(b, \mathbf{z})$$

por continuidad de \mathbf{f} en D . Ahora bien, en esas condiciones, la función $\mathbf{y}(t)$, prolongada por $\mathbf{y}(b) = \mathbf{z}$, es continua y derivable en $(a, b]$ y su derivada (lateral) en b vale $\mathbf{f}(b, \mathbf{z})$, por lo que $\mathbf{y}(t)$ sería solución de la ecuación en $(a, b]$, lo que contradice que (a, b) sea el intervalo maximal. Por lo tanto, $(b, \mathbf{z}) \notin D$ y $(b, \mathbf{z}) \in \text{Fr } D$, que es lo que se pretendía demostrar.

b) Este apartado se demuestra como el precedente.

c) Lo probaremos en primer lugar cuando a o b son finitos. Si no se verifica la tesis, entonces podemos encontrar puntos

$$t_n \in \left(b - \frac{1}{n}, b \right)$$

tales que $(t_n, \mathbf{y}(t_n)) \in K$ (o puntos de $(a, a + 1/n)$ con idéntica propiedad, pero la demostración sería análoga). La sucesión $(t_n, \mathbf{y}(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$, que está en un compacto, admite una subsucesión convergente hacia un punto de K ; lo mismo ocurre con sus componentes, que convergen la primera hacia b y la segunda hacia un límite \mathbf{z} . Entonces, (b, \mathbf{z}) es un punto límite de la gráfica de $\mathbf{y}(t)$ cuando $t \rightarrow b^-$, y pertenece al mismo compacto, K , que los puntos $(t_n, \mathbf{y}(t_n))$, luego pertenece a D , lo que contradice el primer apartado pues, como D es abierto, eso significa que $(b, \mathbf{z}) \notin \text{Fr } D$.

Cuando $b = +\infty$ (o $a = -\infty$) la cosa es todavía más sencilla. K es un conjunto compacto de \mathbb{R}^{n+1} , luego acotado. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, si $t \geq n$, entonces $(t, \mathbf{y}(t)) \notin K$.

4.5.20 Ecuaciones definidas en bandas. El teorema precedente es todo lo que se puede decir del intervalo maximal en el caso general. Podremos decir más del mismo cuando la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sea continua en una banda de \mathbb{R}^{n+1} del tipo $\{a, b\} \times \mathbb{R}^n$, siendo $\{a, b\}$ el intervalo de variación de la primera variable t . Ahora es lícito plantearse si $\{a, b\}$ es o no el intervalo maximal, puesto que no hay ninguna limitación para \mathbf{y} .

$\{a, b\} \times \mathbb{R}^n$ puede no ser un abierto (conexo lo es siempre), pero su geometría sencilla no añade nuevas dificultades. Nos limitaremos a explicar lo que ocurre con el extremo superior del intervalo maximal, siendo idénticas las alternativas para el extremo inferior.

Supongamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es continua en la banda $\{a, b\} \times \mathbb{R}^n$, y sea $\mathbf{y}(t)$ una solución maximal de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Su intervalo maximal es forzosamente de la forma $\{a', b'\}$ (véase el argumento de 4.5.15). Sin embargo puede ocurrir que $b' = b$ o que $b' < b$. En este último caso, forzosamente,

$$\lim_{t \rightarrow b'^-} \|\mathbf{y}(t)\| = +\infty,$$

para no contradecir al teorema precedente (si no, la gráfica de la solución tendría un punto límite y, por el teorema precedente, dicho punto estaría en la frontera de la banda; esto es imposible si $b' < b$).

Supongamos ahora que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es continua en la banda $\{a, b\} \times \mathbb{R}^n$ (ahora b es finito), y sea $\mathbf{y}(t)$ una solución maximal de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Su intervalo maximal puede ser ahora de las formas $\{a', b\}$, o $\{a', b'\}$, con $b' \leq b$. (La forma $\{a', b']$, con $b' < b$, es imposible pues la prolongación a través del punto $(b', \mathbf{y}(b'))$ es inmediata.) En la última situación,

$$\lim_{t \rightarrow b'^-} \|\mathbf{y}(t)\| = +\infty.$$

En efecto; si el intervalo maximal es $\{a', b'\}$, con $b' \leq b$, y no fuese verdad que el anterior límite fuese $+\infty$, la gráfica tendría un punto límite (b', \mathbf{z})

y, aplicando el lema de Witner (v. 4.5.17), el punto sería el límite de la gráfica,

$$\lim_{t \rightarrow b'^-} \mathbf{y}(t) = \mathbf{z},$$

y, aplicando igual argumento que en la demostración del teorema precedente, la solución se podría prolongar a $\{a', b'\}$.

Resumiendo, hemos visto que, cuando la solución permanece acotada, el intervalo maximal es siempre el máximo posible. Cuando la prolongación maximal no es la máxima, la solución tiende a infinito en el correspondiente extremo del intervalo maximal.

4.5.21 Ejemplo. Para la ecuación

$$y' = y^2,$$

con función definida en la banda $R^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (y ya desarrollado en los ejemplos 1.1.18, 1.2.9, 4.5.2 y 4.5.7), la solución $y(t) \equiv 0$ está definida en todo \mathbb{R} y es, evidentemente, maximal. Las soluciones

$$y(t) = \frac{1}{c - t},$$

definidas en $(-\infty, c)$ y en $(c, +\infty)$ son también maximales. Es obvio que

$$\lim_{t \rightarrow c^-} y(t) = +\infty$$

para la solución definida en $(-\infty, c)$, y que

$$\lim_{t \rightarrow c^+} y(t) = -\infty$$

para la solución definida en $(c, +\infty)$.

4.5.22 Ejemplo. En el mismo ejemplo, pero ahora con la ecuación definida únicamente en la banda $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}$, $y(t) \equiv 0$ en $(-\infty, 1)$ es de nuevo una solución maximal. Para $c > 1$, también lo son las

$$y(t) = \frac{1}{c - t},$$

definidas en $(-\infty, 1)$. Todas ellas poseen límite finito cuando $t \rightarrow 1^-$, límite que vale

$$\frac{1}{c - 1}.$$

Para $c < 1$ la fórmula

$$y(t) = \frac{1}{c-t}$$

encubre dos soluciones maximales. Una definida en $(-\infty, c)$ y la otra definida en $(c, 1)$. En c , cualquiera de ambas soluciones tiende en módulo a $+\infty$. En 1 , la segunda de ellas posee límite finito, que vale

$$\frac{1}{c-1}.$$

Finalmente, para $c = 1$, la fórmula esconde una sola solución, definida en

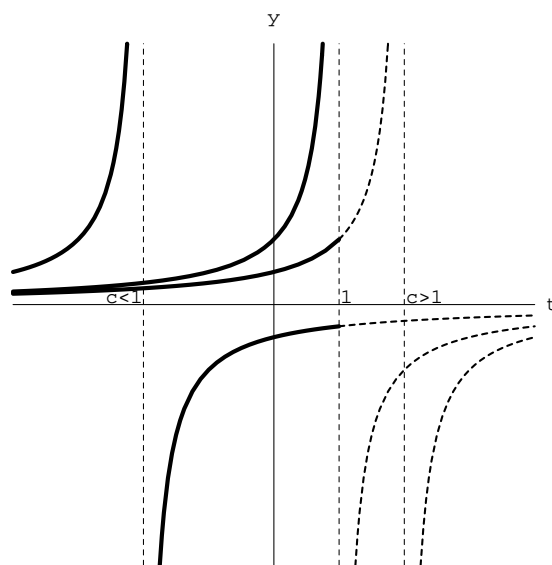


Figura 4.5: Algunas de las diferentes soluciones maximales para $y' = y^2$ definida únicamente en $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}$.

todo $(-\infty, 1)$ y que tiende a $+\infty$ cuando $t \rightarrow 1^-$. Todo esto se puede ver en la figura 4.5.

4.5.23 Ejemplo. Para la ecuación

$$y' = -\frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t},$$

definida en $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}$, la función

$$y(t) = \frac{1}{t} \operatorname{sen} \frac{1}{t},$$

definida en todo $(-\infty, 0)$ es una solución maximal. Todos los puntos $(0, z)$ con $z \in \mathbb{R}$ son puntos límites de la gráfica de $y(t)$ cuando $t \rightarrow 0^-$. Sin embargo, el lema de Witner (v. 4.5.17) no se puede aplicar a ninguno de estos puntos, ya que no es posible realizar una prolongación continua de la función

$$f(t, y) = -\frac{1}{t}y - \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t}$$

a ningún rectángulo que incluya $t = 0$.

4.5.24 Como decíamos, cuando la solución permanece acotada, el intervalo maximal es siempre el máximo posible. Esta es la idea que va a dar pie a varios teoremas sobre el tema, que son los que presentamos a continuación.

4.5.25 TEOREMA (de existencia global en la base de una banda)

Sea $B = \{a, b\} \times \mathbb{R}^n$ una banda de \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función continua y acotada en B . Entonces toda solución maximal de cualquier problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), & (t_0, \mathbf{y}_0) \in B, \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

está definida en todo el intervalo $\{a, b\}$.

Supongamos que $\mathbf{y}(t)$ es una solución maximal. Pongamos

$$M = \sup_{(t, \mathbf{y}) \in B} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|$$

(dicho extremo superior es finito). Si $\{a', b'\}$ es el intervalo maximal, se tiene para todo t a la derecha de t_0 y en dicho intervalo que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds$$

(v. 4.3.6), luego

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{y}(t_0)\| + M(t - t_0).$$

Esta cantidad permanece acotada cuando t se mueve en un intervalo finito, luego el intervalo $\{a', b'\}$ ha de ser $\{a', b\}$ en cualquier caso. Otro tanto sucede con la extremidad izquierda.

4.5.26 TEOREMA (de existencia y unicidad global en la base de una banda)

Sea $B = \{a, b\} \times \mathbb{R}^n$ una banda de \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ es una función continua en la banda y que existe una función continua $L : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L(t) \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

(como la desigualdad de Lipschitz pero con L variando con t). Entonces cualquier problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), & (t_0, \mathbf{y}_0) \in B, \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

admite una única solución maximal que está definida en todo el intervalo $\{a, b\}$.

Nótese que \mathbf{f} es una función continua en B . También es fácil ver que es localmente lipschitziana. B no es necesariamente un conjunto abierto, pero repasando los argumentos que en 4.5.11 nos llevaron a concluir la existencia y unicidad de la solución maximal, vemos que aquí también son válidos y que existe una única solución maximal.

Esta conclusión puede obtenerse directamente de 4.5.11 si pensamos en B como un subconjunto de una banda abierta a la que podemos extender la ecuación. Este mismo argumento es útil en muchos otros casos. Si por la derecha el intervalo es $\{a, b\}$, lo dejaremos así ya que no hay que prolongar nada. Si b es finito y el intervalo es cerrado, $\{a, b\}$, entonces prolongamos las funciones \mathbf{f} y L hasta $+\infty$ poniendo

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(b, \mathbf{y}) \quad \text{y} \quad L(t) = L(b)$$

para todo $t > b$. Así definimos dichas funciones en $\{a, +\infty\}$ con continuidad y cumpliendo aún la misma desigualdad del enunciado. Lo mismo en el extremo izquierdo de la banda si es necesario. En cualquier caso tenemos la situación del enunciado en una banda abierta conteniendo a nuestra banda B . Aplicando ahora la proposición sobre la unicidad de soluciones maximales (v. 4.5.11) resulta que existe en la banda ampliada una única solución maximal del problema de Cauchy, cuya restricción a $\{a, b\}$ nos define la (única) solución maximal en B .

Denotaremos por $\{a', b'\}$ el intervalo maximal de prolongación de la solución. Veamos que se trata del propio intervalo $\{a, b\}$. Supongamos que por la derecha (por la izquierda es igual) no se alcanza el máximo posible. Entonces siempre existe b'' con

$$[t_0, b'] \subset [t_0, b''] \subset [t_0, b].$$

(Así es tanto si $b' < b$ como si $b' = b$ y el intervalo maximal es abierto y el de la banda cerrado.) Para $t \in [t_0, b]$ ponemos

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0) ds,$$

y tomamos

$$M = \max_{t \in [t_0, b'']} \|z(t)\|$$

(una norma cualquiera) y

$$L = \max_{t \in [t_0, b'']} L(t).$$

Para $t \in [t_0, b']$ se tiene que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds,$$

(v. 4.3.6) luego

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0 &= \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0) ds + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0) ds \\ &= \mathbf{z}(t) + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0)] ds, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0\| &\leq \|\mathbf{z}(t)\| + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_0)\| ds \\ &\leq M + \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}(s) - \mathbf{y}_0\| ds. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Gronwall que vimos en 4.4.14 resulta entonces

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0\| \leq M \exp(L(t - t_0)) \leq M \exp(L(b'' - t_0))$$

para $t \in [t_0, b']$. Como b'' es finito, esta expresión permanece acotada y contradice el comportamiento conocido (v. 4.5.20) de $\mathbf{y}(t)$ en el borde del intervalo maximal cuando éste no coincide con el máximo de ancho de la banda. Por lo tanto, el intervalo maximal debe alcanzar por la derecha el máximo posible. Esto termina la demostración del teorema.

4.5.27 Como principal aplicación de este teorema vamos a ver que las ecuaciones lineales poseen soluciones maximales que se prolongan todo lo posible, o sea, al intervalo de continuidad de los coeficientes y el término independiente.

4.5.28 TEOREMA (de existencia y unicidad para sistemas lineales)

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

donde las $n \times n$ componentes $a_{i,j}(t)$ de $A(t)$ y las n componentes $b_i(t)$ de $\mathbf{b}(t)$ son funciones continuas en el intervalo $\{a, b\}$ de \mathbb{R} . Naturalmente, $t_0 \in \{a, b\}$ e \mathbf{y}_0 es un vector arbitrario de \mathbb{R}^n . Entonces existe una única solución maximal del problema, que además está definida en todo $\{a, b\}$.

Es una consecuencia inmediata del último teorema. En este caso,

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t),$$

luego, para no importa qué norma vectorial y su correspondiente norma matricial,

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| = \|A(t)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\| \leq \|A(t)\| \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

en la banda $B = \{a, b\} \times \mathbb{R}^n$. La función

$$L(t) = \|A(t)\|$$

es continua en $\{a, b\}$ (compuesta de $t \rightarrow A(t)$ y de $A \rightarrow \|A\|$; la continuidad de esta última se deduce de 4.1.3), luego estamos en las hipótesis del teorema precedente y podemos obtener la conclusión deseada.

4.5.29 Ejemplo. La propiedad anterior es específica entre otros casos de los sistemas y ecuaciones lineales (tendremos oportunidad de ver numerosos ejemplos en capítulos posteriores), pero no es general. Sabemos ya que la sencilla ecuación (v. 1.1.18, 1.2.9, 4.5.2, 4.5.7 y 4.5.21)

$$y' = y^2$$

no posee la misma propiedad de extensión de las soluciones maximales a todo \mathbb{R} . Sólo la solución $y(t) \equiv 0$ goza de esta extensión. Las restantes crecen excesivamente deprisa en alguno de los extremos del intervalo maximal.

4.5.30 Ejercicios.

1 Idea constructiva de la prolongación maximal. Sea $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida y continua en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1} . Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

Para $a, b > 0$ se considera el rectángulo

$$R_{a,b} = \{(t, \mathbf{y}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\},$$

y se considera la familia \mathcal{U} de tales rectángulos contenidos en D . Pongamos

$$M_{a,b} = \max_{(t, \mathbf{y}) \in R_{a,b}} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\|,$$

para una norma vectorial arbitraria. Si $R_{a,b} \in \mathcal{U}$, el teorema de Cauchy-Peano (v. 4.3.7) asegura la existencia de una solución del problema de Cauchy definida en el intervalo $[t_0 - r_{a,b}, t_0 + r_{a,b}]$ con

$$r_{a,b} = \min\left(a, \frac{b}{M_{a,b}}\right).$$

Pondremos

$$r = \sup_{R_{a,b} \in \mathcal{U}} r_{a,b}.$$

a) Búsqese un ejemplo en que el superior, r , no sea alcanzado, o sea, en el que

$$(\forall R_{a,b} \in \mathcal{U}) \quad r_{a,b} < r.$$

Encuéntrese un $R_{a,b} \in \mathcal{U}$ de tal manera que

$$r_{a,b} > \min\left(\frac{r}{2}, 1\right);$$

la elección de $R_{a,b}$ de esta manera es lo que emplearemos como criterio de selección para ir logrando el intervalo maximal de prolongación. Nótese que este criterio no garantiza un único rectángulo, pero sí un rectángulo conveniente.

b) Supongamos que $\mathbf{y}_1 : [t_{-1}, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución del problema de Cauchy. La aplicación del teorema de Cauchy-Peano, con el proceso de selección de que hemos hablado, a los puntos $(t_{-1}, \mathbf{y}_1(t_{-1}))$ y $(t_1, \mathbf{y}_1(t_1))$ nos lleva tras el empalme de soluciones a una nueva solución $\mathbf{y}_2 : [t_{-2}, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que prolonga la precedente. Pruébese que, continuando de esta manera, obtenemos una sucesión creciente de intervalos,

$$[t_{-1}, t_1] \subset [t_{-2}, t_2] \subset \cdots \subset [t_{-n}, t_n] \subset \cdots,$$

y soluciones cada vez mas extensas tales que la 'reunión' de dichas soluciones constituye una solución maximal de la ecuación, solución definida en el intervalo (que es abierto)

$$\cup_{n=1}^{\infty} [t_{-n}, t_n].$$

2 Estúdiense los puntos de unicidad local y global y los intervalos maximales de las soluciones para la ecuación

$$y' = 3y^{2/3}$$

de los ejemplos 4.3.9 y 4.5.8, pero definida sólo en el abierto $D = \mathbb{R} \times \{y \mid y < c\}$. Naturalmente el estudio dependerá de los valores de c .

3 Estúdiense los puntos de unicidad local y global y los intervalos maximales de las soluciones para la ecuación

$$y' = \sqrt{|y|},$$

definida en todo \mathbb{R}^2 .

4 Estúdiense los puntos de unicidad local y global y los intervalos maximales de las soluciones para la ecuación

$$y' = f(y),$$

donde $f(t, y) = f(y)$ es la función definida en todo \mathbb{R}^2 por

$$f(y) = \begin{cases} y^{2/3}, & |y| \leq 1, \\ y^2, & |y| > 1. \end{cases}$$

5 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la ecuación $y' = f(y)$ dada por una función que sólo depende de la segunda variable.

a) Supóngase que $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución. Pruébese entonces que, para $c > 0$, la función

$$y_c(t) = y(t + c),$$

definida en $[a - c, b - c]$, es también solución.

b) Supongamos ahora que (t_0, y_0) es un punto singular de la ecuación (o sea, un punto sin unicidad local). Pruébese que, entonces, todo (t, y_0) es un punto singular, y que $f(y_0) = 0$.

c) Supongamos de nuevo que (t_0, y_0) es un punto singular de la ecuación y supongamos que y_0 es la única raíz de f en el intervalo $[y_0 - r, y_0 + r]$. Pruébese que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_0 + \epsilon}^{y_0 + r} \frac{1}{|f(s)|} ds < +\infty, \quad \text{o que} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{y_0 - r}^{y_0 - \epsilon} \frac{1}{|f(s)|} ds < +\infty.$$

6 Se considera la función

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y_1, y_2) &\rightarrow (y_1^{1/3} \operatorname{sen} y_2, 0). \end{aligned}$$

- a) Estúdiese si es globalmente o localmente lipschitziana.
 b) Calcúlese el número de soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0). \end{cases}$$

- 7 Lo mismo que el problema anterior pero para la función

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y_1, y_2) &\rightarrow (y_1^{1/3} \cos y_2, 0). \end{aligned}$$

- 8 Se considera la ecuación

$$y' = f(t, y) = \begin{cases} ty, & t < y, \\ t^2, & t \geq y, \end{cases}$$

definida en todo \mathbb{R}^2 .

- a) Pruébese que existe una única solución maximal pasando por cada punto y calcúlese su intervalo maximal de definición.
 b) Búsqese la solución que verifica $y(0) = 0$.
 c) Descríbanse las restantes soluciones de la ecuación.

- 9 Siendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

- a) Pruébese que, si $y_1(t), y_2(t)$ son dos soluciones del problema, y si, para $t_1 \neq t_0$

$$y_1(t_1) \leq z_1 \leq y_2(t_1),$$

entonces existe una solución, $z(t)$, del problema de Cauchy, definida en un intervalo conteniendo a t_0 y t_1 , y tal que $z(t_1) = z_1$.

- b) Pruébese que, si el problema de Cauchy admite dos soluciones diferentes, entonces admite una infinidad de soluciones diferentes.

- 10 Tras resolver la ecuación

$$y' + y^2 = 1 + t^2$$

(véase el ejercicio 12 de la sección 2.3), calcúlese el intervalo maximal de definición de sus soluciones.

11 a) Se considera la ecuación definida en todo \mathbb{R}^2

$$y' = P(y)t - P(t)y + 1,$$

donde P es una función de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{R} y con derivada acotada. Estúdiense el número de soluciones que pasan por cada punto del plano y su intervalo maximal de definición.

b) Sabiendo que la ecuación (de Riccati)

$$y' = y^2t - t^2y + 1$$

admite un polinomio como solución, calcúlense todas sus soluciones y su intervalo maximal de definición.

12 Se considera la función *signo*

$$\text{sg}(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ -1, & y < 0, \end{cases}$$

y la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y) = \begin{cases} \frac{2y}{t}, & |y| < t^2, \\ 2t \text{sg}(y), & |y| \geq t^2, \end{cases}$$

definida en todo \mathbb{R}^2 .

a) Calcúlense las soluciones de la ecuación.

b) Búsquense las soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

c) Calcúlense los puntos de unicidad local y de unicidad global de la ecuación.

13 Calcúlese el intervalo maximal de definición de la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = -4(y_2)^2 + 2y_1y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2, \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1. \end{cases}$$

4.6 Dependencia continua respecto de parámetros y condiciones iniciales.

4.6.1 Un modelo matemático, en particular una ecuación diferencial, es una representación abstracta de un problema físico. Al formular el modelo, tenemos en cuenta los aspectos principales del problema, descartando los secundarios. Así podemos conseguir un resultado manejable. En los capítulos 1 y 3 hemos visto distintas ecuaciones que representan el mismo problema con precisión diferente.

En los problemas de Cauchy se exigen condiciones iniciales que garantizan una solución única del problema. Estos datos iniciales provienen de mediciones realizadas con uno u otro método pero siempre con una cierta aproximación. Además, cualquier método de almacenamiento de números utiliza sólo una cantidad finita (posiblemente grande) de ellos. Esto hace que, forzosamente, tengamos una pequeña imprecisión en los datos iniciales. Otro tanto podemos pensar de la ecuación.

Vamos a ver que pequeños cambios en los términos de una ecuación o en los datos iniciales (de un problema de Cauchy), no producen en tiempo finito más que pequeños cambios en los resultados (las soluciones). Esto garantiza la coherencia de la ecuación como modelo matemático.

Si dos ecuaciones próximas, y que, por lo tanto, representan dos modelos poco distorsionados de un mismo problema, tuviesen soluciones muy alejadas en tiempo finito, resultaría difícil decir cuál de ellas (si es que lo hace alguna) pronostica correctamente el comportamiento futuro del problema.

Comenzamos dando una estimación para la desviación de soluciones de ecuaciones próximas. Previamente, vamos a definir lo que entendemos por solución aproximada de una ecuación.

4.6.2 Solución ϵ -aproximada. Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una función $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ la correspondiente ecuación diferencial y $\epsilon > 0$.

Decimos que la función $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en un intervalo I de \mathbb{R} , es una *solución ϵ -aproximada* de la ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ cuando \mathbf{y} es una función continua en I , con derivada continua a trozos en I y, además, tal que

$$\|\mathbf{y}'(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq \epsilon$$

en los puntos en que \mathbf{y} es derivable. (La norma es cualquier norma de \mathbb{R}^n , y lo será en toda la sección mientras no especifiquemos otra cosa.)

4.6.3 PROPOSICIÓN (separación entre soluciones aproximadas)

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ una función continua $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ la correspondiente ecuación diferencial. Supongamos que \mathbf{f} es lipschitziana en D con respecto de la variable \mathbf{y} , con constante de Lipschitz L .

Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluciones ϵ_1 y ϵ_2 -aproximadas de la ecuación. Fijemos $t_0 \in I$ y pongamos $\mathbf{y}_{1,0} = \mathbf{y}_1(t_0)$ y $\mathbf{y}_{2,0} = \mathbf{y}_2(t_0)$.

Entonces

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\| \leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| e^{L|t-t_0|} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1),$$

para todo $t \in I$.

Busquemos una inecuación integral para $\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\|$, de manera que podamos aplicar la desigualdad de Gronwall. Tenemos

$$\mathbf{y}'_1(t) - \mathbf{y}'_2(t) = \mathbf{y}'_1(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1(t)) - \mathbf{y}'_2(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t)) + \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t)),$$

luego, integrando entre t_0 y t para $t_0 \leq t$ (siendo análogo el otro caso),

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t) &= \mathbf{y}_1(t_0) - \mathbf{y}_2(t_0) + \int_{t_0}^t [\mathbf{y}'_1(s) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s))] ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t [\mathbf{y}'_2(s) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s))] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s))] ds. \end{aligned}$$

Tomando normas y acotando, tenemos

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\| \leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(t - t_0) + \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\| ds.$$

Para la función

$$u(t) = \|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\|$$

tenemos entonces que

$$u(t) \leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(t - t_0) + \int_{t_0}^t L u(s) ds,$$

y, aplicando la desigualdad de Gronwall en su versión de 4.4.14 para las funciones $g(t) = \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(t - t_0)$ y $k(t) = L$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(t - t_0) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + (\epsilon_1 + \epsilon_2)(s - t_0)] L e^{L(t-s)} ds \\ &= \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| e^{L(t-t_0)} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \end{aligned}$$

tras un sencillo desarrollo. Esto es, justamente, lo que pretendíamos demostrar.

4.6.4 Podemos pensar en soluciones de ecuaciones diferenciales próximas (que es lo que nos interesa) como en soluciones aproximadas de la misma ecuación, y aplicar la proposición que acabamos de ver. Es lo que hacemos ahora, añadiendo la posibilidad de que los valores iniciales no estén dados en la misma abscisa.

4.6.5 PROPOSICIÓN (separación entre soluciones de ecuaciones diferenciales próximas)

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ y $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ funciones continuas $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que \mathbf{f} es lipschitziana en D con respecto de la variable \mathbf{y} , con constante de Lipschitz L .

Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluciones respectivas de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ e $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$, verificando

$$\mathbf{y}_1(t_1) = \mathbf{y}_{1,0} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_2(t_2) = \mathbf{y}_{2,0}.$$

Denotemos por M el máximo

$$M = \max_{t \in J} \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}_2(t))\|,$$

donde J es el intervalo de extremos t_1 y t_2 , y supongamos que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t)) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}_2(t))\| \leq \epsilon$$

para todo $t \in I$.

Entonces

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\| \leq (\|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + M|t_1 - t_2|)e^{L|t-t_1|} + \frac{\epsilon}{L}(e^{L|t-t_1|} - 1)$$

para todo $t \in I$.

En particular, cuando $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, es decir, cuando $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ son soluciones de la misma ecuación, entonces

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\| \leq (\|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + M|t_1 - t_2|)e^{L|t-t_1|}$$

para todo $t \in I$.

La idea es considerar \mathbf{y}_2 como una solución aproximada de la ecuación $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}'_2(t) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t))\| &\leq \|\mathbf{y}'_2(t) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}_2(t))\| + \|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}_2(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2(t))\| \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

es solución ϵ -aproximada. Además

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_2(t_1)\| &\leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + \|\mathbf{y}_2(t_2) - \mathbf{y}_2(t_1)\| \\ &\leq \|\mathbf{y}_{1,0} - \mathbf{y}_{2,0}\| + M|t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

y ya sólo tenemos que aplicar la desigualdad de la proposición precedente.

4.6.6 Ecuación dependiente de parámetros. Tenemos ya la preparación suficiente para abordar la dependencia continua de las soluciones respecto de los datos iniciales. Sin embargo aún nos falta un ingrediente. Hemos visto que por razones de aproximación del modelo, la expresión de la ecuación puede variar un poco. Lo que vamos a hacer es considerar una variable que permite modificar esa expresión; es lo que se suele llamar un parámetro.

Consideremos ahora la familia de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}),$$

dependientes de m parámetros recogidos en un vector

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Pondremos a veces $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$. Supongamos que las \mathbf{f} están definidas en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1+m} y que, en él, son continuas y localmente

lipschitzianas respecto de la variable \mathbf{y} (o sea, para cada valor $\boldsymbol{\mu}_0$ del parámetro, la función $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}_0}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_0)$ es localmente lipschitziana).

Fijemos $(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \in D$. Representamos entonces por $\mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}(t)$ el valor en t de la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}_0}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_0), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

que estará definida en un intervalo maximal, que nosotros denotaremos por $I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}$. Podemos considerar $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0) = \mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}(t)$ como función de todos sus argumentos en el conjunto

$$\bigcup_{(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \in D} I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0} \times \{t_0\} \times \{\mathbf{y}_0\} \times \{\boldsymbol{\mu}_0\}.$$

Nuestra intención es concluir que el conjunto $\bigcup I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0} \times \{t_0\} \times \{\mathbf{y}_0\} \times \{\boldsymbol{\mu}_0\}$ es abierto y que, en él, \mathbf{y} es una aplicación continua. La idea consiste en que, gracias a la continuidad de la función \mathbf{f} , las ecuaciones con $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}}(t, \mathbf{y})$ y con $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}'}(t, \mathbf{y})$ son próximas cuando $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\mu}'$ lo son, pudiéndose aplicar entonces la proposición precedente.

Las conclusiones aparecen recogidas en el siguiente teorema cuya prueba omitimos. Nos limitaremos únicamente a dar su enunciado y el de varias consecuencias, enviando al lector al libro de C. Martínez y M.A. Sanz ([MARTÍNEZ/SANZ] cap. IV) para una demostración del mismo. Sin embargo, su importancia es grande y el lector debe poner cuidado en conocerlo y saberlo aplicar.

4.6.7 TEOREMA (de dependencia continua respecto de las condiciones iniciales y los parámetros)

Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}),$$

dependientes de m parámetros recogidos en un vector

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m.$$

\mathbf{f} será una función continua de las tres variables en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1+m} . En D la función \mathbf{f} es localmente lipschitziana

respecto de la variable \mathbf{y} en el sentido siguiente: para $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, consideramos el abierto

$$D_{\boldsymbol{\mu}} = \{(t, \mathbf{y}) \mid (t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \in D\};$$

la función $\mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ es localmente lipschitziana respecto de \mathbf{y} en $D_{\boldsymbol{\mu}}$.

Denotemos por $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0) = \mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}(t)$ el valor en t de la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\mu}_0}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_0), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

que estará definida en un intervalo maximal, que nosotros denotaremos por $I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}$.

Sea $U = \bigcup_{(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0) \in D} I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0} \times \{t_0\} \times \{\mathbf{y}_0\} \times \{\boldsymbol{\mu}_0\}$. Entonces:

- U es un abierto, es decir, si $\mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}$ está definida en $[a, b] \subset I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $\|(t_1 - t_0, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)\| < \delta$ la función $\mathbf{y}_{t_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1}$ está definida en todo $[a, b]$;
- $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, es decir, si $t \in I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}$, entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si

$$\|(t' - t, t_1 - t_0, \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)\| < \delta,$$

se tiene

$$\|\mathbf{y}(t', t_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1) - \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0)\| < \epsilon.$$

4.6.8 Ejemplo. El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \mu, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \end{cases}$$

se puede transformar con el cambio $y_1 = y$, $y_2 = y'$, en el problema de Cauchy vectorial de primer orden

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = \mu, \\ y_1(t_0) = y_0, \quad y_2(t_0) = y'_0, \end{cases}$$

con solución (\mathbf{y} es $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$)

$$\mathbf{y}(t, t_0, (y_0, y'_0), \mu) = \begin{bmatrix} \frac{t^2\mu}{2} + t(y'_0 - t_0\mu) + \frac{t_0^2\mu}{2} - y'_0 t_0 + y_0 \\ t\mu + y'_0 - t_0\mu \end{bmatrix},$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^5$. Obsérvese que, para t suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t, t_1, (y_{0,1}, y'_{0,1}), \mu_1) - \mathbf{y}(t, t_0, (y_{0,0}, y'_{0,0}), \mu_0)\|_\infty &\simeq \\ &\simeq \frac{t^2}{2}(\mu_1 - \mu_0) + t(y'_{0,1} - y'_{0,0} - t_1\mu_1 + t_0\mu_0), \end{aligned}$$

cuando los coeficientes de este polinomio no se anulan, y que las soluciones se separan mucho aunque inicialmente estén próximas.

Cuando $\mu_1 = \mu_0 = \mu$ e $y'_{0,1} - y'_{0,0} = \mu(t_1 - t_0)$, entonces las soluciones se mantienen a distancia constante. Se trata de soluciones trasladadas una de la otra que tienen, en cada instante de tiempo, igual velocidad.

4.6.9 Ejemplo. Para la ecuación

$$y' = y^2,$$

que ya hemos visto en los ejemplos 1.1.18, 1.2.9, 4.5.2, 4.5.7, 4.5.21 y 4.5.29, y en la que no introducimos parámetros, tenemos que

$$y(t) = \frac{1}{k - t}$$

es la solución general, luego que, para $\epsilon > 0$ la solución es

$$y(t, 0, \epsilon) = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon t},$$

solución definida en $(-\infty, 1/\epsilon)$. Por otra parte, la solución que pasa por $(0, 0)$ es

$$y(t, 0, 0) \equiv 0.$$

Por tanto, aunque ϵ sea próximo a 0, las soluciones se alejan indefinidamente cuando t se acerca por la izquierda a $1/\epsilon$, y la primera de ellas no está definida cuando t sobrepasa $1/\epsilon$. Como se ve, el teorema garantiza que las soluciones de problemas de Cauchy próximos pueden definirse en los mismos intervalos y van a permanecer próximas, pero todo ello en tiempo finito.

4.6.10 Vamos a utilizar en lo que sigue una consecuencia inmediata del anterior teorema.

COROLARIO

Supongamos, en las condiciones del teorema precedente, que

$$[a, b] \times \{t_0\} \times \{\mathbf{y}_0\} \times \{\boldsymbol{\mu}_0\} \subset U.$$

Entonces,

$$[a, b] \times \{t_1\} \times \{\mathbf{y}_1\} \times \{\boldsymbol{\mu}_1\} \subset U$$

para $(t_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1)$ en un entorno de $(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ y, además,

$$\lim_{(t_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1) \rightarrow (t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0)} \mathbf{y}_{t_1, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_1}(t) = \mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0}(t),$$

para todo $t \in [a, b]$.

Basta aplicar el teorema considerando que, para cada t fijo, $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$ es una función continua de las variables $(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}_0)$.

4.6.11 En Cálculo Infinitesimal se han estudiado y empleado métodos de comparación para deducir convergencia o divergencia de series e integrales. Se han repetido estos métodos al estudiar sucesiones y series de funciones. Tal vez el más famoso sea (por recordar alguno) el criterio M de Weierstrass que permite deducir la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones mediante su comparación con una serie convergente de términos positivos. Hemos empleado este criterio en 4.4.16, al probar el teorema de Picard-Lindelöf.

Pues bien, vamos a tener resultados parecidos para comparar el tamaño de las soluciones de ecuaciones diferenciales, basándonos en el tamaño de las propias ecuaciones.

4.6.12 LEMA

Sea D un abierto de \mathbb{R}^2 , $f(t, y)$ con $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua e $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de la ecuación

$$y' = f(t, y)$$

definida en el intervalo $[a, b]$ y con gráfico contenido en D . Supondremos además que f es localmente lipschitziana respecto

de y en algún abierto (posiblemente no todo D) conteniendo los puntos de la gráfica de $y(t)$, que es

$$Gr = \{(t, y(t)) \mid t \in [a, b]\}.$$

Supongamos que $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^1 , con gráfica contenida en D y tal que

$$z(a) \leq y(a)$$

y que, para $t \in [a, b]$,

$$z'(t) \leq f(t, z(t)).$$

Entonces, para todo $t \in [a, b]$,

$$z(t) \leq y(t).$$

Denotemos por D' un abierto conteniendo Gr y en el que f es localmente lipschitziana. Aplicando el teorema de continuidad (v. 4.6.7) al problema

$$\begin{cases} v' = f(t, v, \epsilon) = f(t, v) + \epsilon, \\ v(a) = y(a), \end{cases}$$

con $\epsilon > 0$, en el abierto D' , resulta que, para ϵ suficientemente pequeño, la solución y_ϵ de dicho problema está definida en $[a, b]$, con su gráfica contenida en D' . Sea ϵ fijo uno de esos valores. Consideremos los puntos t' para los que

$$(\forall t \in [a, t']) \quad z(t) \leq y_\epsilon(t).$$

Entre tales puntos está al menos a . Consideremos, además, el extremo superior, t_0 , de tales puntos.

Supongamos que fuese $t_0 < b$. En ese caso, $z(t) \leq y_\epsilon(t)$ para $t \leq t_0$ y, a la derecha de t_0 , existirían puntos arbitrariamente próximos a t_0 en los que $z(t) > y_\epsilon(t)$. Entonces, por un lado, $z(t_0) = y_\epsilon(t_0)$, y por otro,

$$z'(t_0) \leq f(t_0, z(t_0)) = f(t_0, y_\epsilon(t_0)) < f(t_0, y_\epsilon(t_0)) + \epsilon = y'_\epsilon(t_0).$$

La función $z(t) - y_\epsilon(t)$ es decreciente en t_0 y vale 0 en dicho punto, luego a la derecha de t_0 $z(t) - y_\epsilon(t) < 0$, o sea,

$$z(t) < y_\epsilon(t),$$

lo que contradice la elección de t_0 .

Por lo tanto, $t_0 = b$, lo que implica que en el intervalo $[a, b]$ las $y_\epsilon(t)$ verifican $z(t) \leq y_\epsilon(t)$. Finalmente, $y_\epsilon(t)$ converge en $[a, b]$ hacia $y(t)$ (v. 4.6.10), luego de la desigualdad $z(t) \leq y_\epsilon(t)$ se deduce $z(t) \leq y(t)$ en $[a, b]$.

4.6.13 Ahora son bastante inmediatos dos teoremas de comparación.

TEOREMA (de comparación entre dos ecuaciones escalares)

Sea D un abierto de \mathbb{R}^2 , $f(t, y)$ y $g(t, y)$ funciones continuas $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$ las correspondientes ecuaciones diferenciales. Supongamos que una de las dos funciones, f ó g , es localmente lipschitziana en D con respecto de la variable y .

Sean $y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soluciones respectivas de $y' = f(t, y)$ e $y' = g(t, y)$. Supongamos que se verifica

$$g(t, y) \leq f(t, y)$$

en D , y que

$$z(a) \leq y(a).$$

Entonces,

$$z(t) \leq y(t)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Supondremos primero que f es localmente lipschitziana. Todo consiste en utilizar el lema precedente, teniendo en cuenta que ahora

$$z'(t) = g(t, z(t)) \leq f(t, z(t)),$$

en $[a, b]$, que es la hipótesis que faltaba.

El caso en que g es localmente lipschitziana se prueba de forma similar. También se puede deducir del caso anterior, como vamos a ver a continuación. Consideremos el abierto simétrico de D

$$D_1 = \{(t, -y) \mid (t, y) \in D\},$$

y las funciones $f_1, g_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(t, y) = -f(t, -y), \quad g_1(t, y) = -g(t, -y).$$

Entonces, $y_1(t) = -y(t)$ y $z_1(t) = -z(t)$ son soluciones de las ecuaciones

$$y_1'(t) = -y'(t) = -f(t, y(t)) = f_1(t, y_1(t))$$

y

$$z_1'(t) = -z'(t) = -g(t, z(t)) = g_1(t, z_1(t));$$

además

$$f_1(t, y) \leq g_1(t, y),$$

$g_1(t, y)$ es localmente lipschitziana e

$$y_1(a) = -y(a) \leq -z(a) = z_1(a).$$

Por lo tanto, para $t \in [a, b]$,

$$y_1(t) \leq z_1(t)$$

y

$$z(t) \leq y(t).$$

4.6.14 Como venimos indicando repetidamente, se puede enunciar un resultado similar para un intervalo de la forma $[b, a]$, a la izquierda de a . Suponemos que

$$g(t, y) \leq f(t, y)$$

y que f ó g es localmente lipschitziana. Si

$$y(a) \leq z(a)$$

se tiene entonces que

$$y(t) \leq z(t)$$

en $[b, a]$.

Finalmente, si

$$g(t, y) \leq f(t, y),$$

f ó g es localmente lipschitziana, y si

$$y(a) = z(a),$$

entonces

$$y(t) \leq z(t)$$

a la izquierda de a y

$$z(t) \leq y(t)$$

a su derecha.

4.6.15 TEOREMA (de comparación entre una ecuación vectorial y otra escalar)

Sea D un abierto de \mathbb{R}^{n+1} , $\mathbf{g}(t, y)$ una función continua en D , $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{z}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{z})$ la correspondiente ecuación diferencial. Sea $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de dicha ecuación.

Sea $f : [a, b] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función continua y localmente lipschitziana en la semibanda en la que está definida, $y' = f(t, y)$ la correspondiente ecuación e $y : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ una solución de dicha ecuación.

Supongamos que

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{z})\|_2 \leq f(t, \|\mathbf{z}\|_2)$$

para todo $(t, \mathbf{z}) \in D$ y que

$$\|\mathbf{z}(a)\|_2 \leq y(a)$$

(empleamos aquí la norma $\|\cdot\|_2$ de \mathbb{R}^n). Entonces,

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2 \leq y(t)$$

para todo $t \in [a, b]$.

La función f no está definida en un abierto, pero la geometría sencilla del recinto en el que está definida hace que el lema precedente pueda igualmente aplicarse. También tenemos como alternativa el buscar una extensión continua y localmente lipschitziana de f , primero a la banda $[a, b] \times R$ y luego a todo \mathbb{R}^2 de la misma manera que lo hicimos en 4.5.26. De cualquier manera, lo que importa es la solución $y(t)$, y esa sólo toma valores positivos.

La principal dificultad a la que vamos a enfrentarnos es que la función $\|\mathbf{z}(t)\|_2$ no es derivable donde $\mathbf{z}(t)$ se anula. Vamos a salvarla comparando las funciones $u(t) = \|\mathbf{z}(t)\|_2^2$ y $v(t) = y^2(t)$, lo que, de cara al resultado es lo mismo. En primer lugar, tenemos que

$$v'(t) = 2y(t)y'(t) = 2y(t)f(t, y(t)) = 2\sqrt{v(t)}f\left(t, \sqrt{v(t)}\right).$$

La función $\tilde{f}(t, v) = 2\sqrt{v(t)}f(t, \sqrt{v(t)})$ es continua y localmente lipschitziana en $[a, b] \times (0, +\infty)$, pero también en todo $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ con el proceso de prolongación de que antes hemos hablado. Por otra parte,

$$u(t) = (\mathbf{z}(t) | \mathbf{z}(t)) = [\mathbf{z}(t)]^t \mathbf{z}(t),$$

luego, utilizando la desigualdad de Schwarz,

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= [\mathbf{z}'(t)]^t \mathbf{z}(t) + [\mathbf{z}(t)]^t \mathbf{z}'(t) \\
 &= [\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t))]^t \mathbf{z}(t) + [\mathbf{z}(t)]^t \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) \\
 &\leq 2 \|\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t))\|_2 \|\mathbf{z}(t)\|_2 \\
 &\leq 2 f(t, \|\mathbf{z}(t)\|_2) \|\mathbf{z}(t)\|_2 \\
 &\leq \tilde{f}(t, u(t)).
 \end{aligned}$$

Además,

$$u(a) = \|\mathbf{z}(a)\|_2^2 \leq y^2(a) = v(a).$$

Casi podemos aplicar el lema 4.6.12. Si no podemos hacerlo es porque \tilde{f} no es necesariamente lipschitziana en los puntos de la forma $(t, 0)$. Para terminar, daremos un pequeño rodeo.

Si $y(a) > 0$, entonces $v(a) > 0$ y, como la derivada verifica

$$v'(t) = \tilde{f}(t, v(t)) \geq 0$$

resulta que $v(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Podemos entonces aplicar el lema al abierto \mathbb{R}^2 y al subabierto $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ a los que se prolonga \tilde{f} desde $[a, b] \times (0, +\infty)$ y obtener la conclusión.

Si $\|\mathbf{z}(a)\|_2 = y(a) = 0$, entonces consideramos las soluciones $y_\epsilon(t)$ de

$$\begin{cases} w' = f(t, w), \\ w(a) = y(a) + \epsilon = \epsilon \end{cases}$$

(lo que ahora varía es la ordenada inicial ϵ). Como la solución $y(t)$ con $y(a) = 0$ estaba definida en $[a, b]$, entonces las soluciones de nuestros problemas estarán también definidas, para ϵ suficientemente pequeño, en $[a, b]$. Por otra parte, verificarán (como antes) que

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2 \leq y_\epsilon(t)$$

para todo $t \in [a, b]$; finalmente, tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$ (v. 4.6.10) obtenemos

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2 \leq y(t)$$

para todo $t \in [a, b]$, que es en este caso la conclusión que estábamos buscando.

4.6.16 Ejemplo. Podemos aproximar la solución $z(t)$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = t \operatorname{sen} y^2, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0.1, \end{cases}$$

(desconocida) comparándola con la del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty^2, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0.1, \end{cases}$$

que nos es conocida, y es

$$\frac{2}{20 - t^2}.$$

En $[0, 1]$ la solución $z(t)$ es creciente, pues tiene derivada positiva. Además, $z'(t) \leq 1$, luego

$$z(t) \leq z(0) + t \leq 1.1$$

en una primera aproximación. Tenemos pues que la gráfica de $z(t)$ permanece en el rectángulo $[0, 1] \times [0.1, 1.1]$. Pero aún hay más, como en el primer cuadrante se tiene que

$$t \operatorname{sen} y^2 \leq ty^2,$$

resulta, aplicando el teorema 4.6.13, que

$$0.1 \leq z(t) \leq \frac{2}{20 - t^2} \leq \frac{2}{19}.$$

La gráfica de $z(t)$ permanece en el rectángulo $[0, 1] \times [0.1, 2/19]$. Hay ahora dos posibilidades de aplicación de la proposición 4.6.5. La mejor se obtiene tomando en la proposición $f(t, y) = t \operatorname{sen} y^2$, $y_1(t) = z(t)$, $g(t, y) = ty^2$ e $y_2(t) = 2/(20 - t^2)$. f es lipschitziana en el último rectángulo citado, con constante de Lipschitz que podemos tomar como

$$L = \sup_{(t,y) \in R} \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \sup_{(t,y) \in R} 2ty \cos y^2 \leq \frac{4}{19} \cos \left(\frac{2}{19} \right)^2 = 0.2105.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(t, y_2(t)) - g(t, y_2(t))| &= t[(y_2(t))^2 - \operatorname{sen}(y_2(t))^2] \\ &\leq \left(\frac{2}{19} \right)^2 - \operatorname{sen} \left(\frac{2}{19} \right)^2 \\ &= 0.2267 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, sabemos que en el intervalo $[0, 1]$,

$$z(t) - \frac{2}{20 - t^2} \leq \frac{0.2267 \cdot 10^{-6}}{0.2105} (e^{0.2105t} - 1) \leq 0.2523 \cdot 10^{-6}.$$

4.6.17 Ejercicios.

1 Obténgase una acotación en el intervalo $[0, 1]$ para la diferencia $|y_1(t) - y_2(t)|$ entre las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} y' = t(1 - \cos y), \\ y(0) = 0.1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = \frac{ty^2}{2}, \\ y(0) = 0.1. \end{cases}$$

2 Sabemos ya de la sección 1.5 que el péndulo de modelo

$$x'' + \sin x = 0$$

se aproxima bien, para valores pequeños de $x(t)$, por la ecuación más sencilla

$$x'' + x = 0.$$

Obténgase una estimación de la distancia de las soluciones respectivas de ambas soluciones y de la condición inicial

$$x(0) = 0.1, \quad x'(0) = 0.$$

3 Siendo $a(t)$ una función continua y n un número natural impar, se considera la ecuación

$$y' = a(t) - y^n.$$

Pruébese que todas sus soluciones se pueden prolongar por la derecha hasta $+\infty$. Pruébese que ello no es así cuando n es par.

4 a) Sean $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluciones respectivas (maximales) de los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = 1 + y^{2/3}, \\ y(0) = y_0 > 0. \end{cases}$$

Pruébese que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ están definidas en toda \mathbb{R} y estúdiense el comportamiento de $|y_1(t) - y_2(t)|$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

b) Hágase el mismo estudio, pero siendo la ecuación

$$y' = \frac{1}{1 + y^{2/3}}.$$

5 Se considera la ecuación

$$y' = 1 + t^2 + y^2.$$

a) Pruébese que ninguna solución de la ecuación está definida en toda \mathbb{R} .

b) Demuéstrase que la longitud del intervalo maximal de definición de la solución de

$$\begin{cases} y' = 1 + t^2 + y^2, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiende a 0 cuando t_0 tiende a $+\infty$.

6 Pruébese que el intervalo maximal por la derecha para el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \operatorname{sen} y_1, \\ y_2' = y_1 + y_2 \operatorname{cos} y_1, \\ y_1(0) = y_2(0) = 1, \end{cases}$$

es todo $[0, +\infty)$.

7 Se considera la familia de ecuaciones diferenciales

$$y' = 2\mu^2 t e^{-y},$$

y, para cada valor de μ , sea $y_{t_0, y_0, \mu}(t) = y(t, t_0, y_0, \mu)$ la solución de la ecuación que vale y_0 en t_0 .

a) Siendo U el abierto reunión de intervalos maximales del teorema 4.6.7, abierto en el que está definida $y(t, t_0, y_0, \mu)$, calcúlese U en este caso.

b) Pruébese que $y(t, t_0, y_0, \mu)$ es localmente lipschitziana respecto de las variables t_0 , y_0 y μ , pero que no es globalmente lipschitziana en U respecto de ninguna de ellas.

c) Denotemos por $I_{t_0, y_0, \mu}$, como siempre, el intervalo maximal de la solución $y_{t_0, y_0, \mu}(t)$. Compruébese que, para todo y_0 y todo μ , se tiene $I_{0, y_0, \mu} = \mathbb{R}$.

d) Consideremos ahora el problema con $t_0 \neq 0$. Demuéstrase que existe $\mu^*(t_0, y_0) > 0$ tal que $I_{t_0, y_0, \mu} = \mathbb{R}$ si y sólo si $|\mu| < \mu^*(t_0, y_0)$. Pruébese que los extremos del intervalo maximal de definición no varían de forma continua respecto de las variables t_0 , y_0 y μ .

4.7 Derivabilidad respecto de condiciones iniciales y parámetros.

4.7.1 Hemos visto en la sección anterior que, cuando $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ es continua y localmente lipschitziana respecto de \mathbf{y} , entonces $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$ es también continua. Cuando \mathbf{f} admite derivadas parciales continuas esto sigue siendo cierto, pero, además, la función $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$ admite derivadas parciales continuas respecto de todos sus argumentos. Mejora pues la dependencia de las soluciones con respecto de las condiciones iniciales y de

los parámetros. Además de ser un comentario académico, esto va a permitirnos introducir las técnicas del cálculo diferencial en los problemas en que datos iniciales y parámetros estén implicados.

Las conclusiones están recogidas en dos teoremas cuyas demostraciones no incluimos (como ya hicimos con el teorema de la dependencia continua) para mantener el nivel del libro en términos adecuados. El lector que quiera ver las demostraciones puede acudir a los libros de M. de Guzmán ([GUZMÁN] cap. 4) o de C. Martínez y M.A. Sanz ([MARTÍNEZ/SANZ] cap. IV), donde están expuestas. Cabe repetir aquí la recomendación que ya hicimos en 4.6.6.

4.7.2 TEOREMA (de derivabilidad respecto de las condiciones iniciales)

Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

donde \mathbf{f} es una función continua en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos además que existen para \mathbf{f} todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

y que son continuas. Consideremos como en el teorema 4.6.7 la función $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$, y el abierto U en el que está definida. Entonces, la función $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 , es decir, admite derivadas parciales continuas respecto de todas las variables.

4.7.3 TEOREMA (de derivabilidad respecto de las condiciones iniciales y de los parámetros)

Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}),$$

donde \mathbf{f} es una función continua en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1+m} . Supongamos además que existen para \mathbf{f} todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \mu_k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

y que son continuas. Consideremos como en el teorema 4.6.7 la función $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$, y el abierto U en el que está definida. Entonces, la función $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 , es decir, admite derivadas parciales continuas respecto de todas las variables.

4.7.4 La dificultad en la demostración de ambos teoremas está en el cálculo del límite del cociente incremental que define cada derivada parcial. Sin embargo, no es difícil pronosticar cuáles van a ser los resultados.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

donde \mathbf{f} es una función continua con derivadas parciales continuas. Consideremos como en el teorema 4.6.7 la función $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0}(t)$, y el abierto U en el que está definida. Podemos decir que

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)),$$

con

$$\mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0,$$

por la propia definición de la función \mathbf{y} .

De más interés resulta comprobar que las otras derivadas parciales (respecto de t_0 y respecto de cada y_j) están asociadas a la ecuación vectorial

$$\mathbf{z}' = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \mathbf{z} = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial y_j} \right] \cdot \mathbf{z},$$

que se conoce como *ecuación variacional lineal*.

En efecto, denotemos, para datos iniciales (t_0, \mathbf{y}_0) fijos, la función

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t_0},$$

definida en el intervalo I_{t_0, \mathbf{y}_0} y con llegada en \mathbb{R}^n . Entonces esta función es solución del problema de Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{z}' = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial y_j} \right] \cdot \mathbf{z}, \\ \mathbf{z}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0). \end{cases}}$$

En efecto, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t_0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial t_0} \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

(o sea, $\mathbf{z}(t)$ es solución de la ecuación variacional). Por otra parte, la función

$$\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0)$$

es constante ($\equiv \mathbf{y}_0$), luego

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t_0} \\ &= \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0)) + \mathbf{z}(t_0) \\ &= \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) + \mathbf{z}(t_0), \end{aligned}$$

y obtenemos la condición inicial.

Denotemos ahora por $Z(t)$ la función matricial (en este caso $n \times n$)

$$Z(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} = \left[\frac{\partial y_i(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial y_{0,j}} \right]$$

(función con llegada en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y considerada con t_0 e \mathbf{y}_0 fijos en el intervalo I_{t_0, \mathbf{y}_0}). Entonces esta función es solución del problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial y_j} \right] \cdot Z, \\ Z(t_0) = I_n. \end{array} \right.$$

En efecto, se obtiene ahora intercambiando $\partial/\partial t$ con $\partial/\partial \mathbf{y}_0$ y aplicando la regla de la cadena,

$$Z'(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0))}{\partial \mathbf{y}} Z(t),$$

o sea, la ecuación variacional. Por otro lado, la función

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$$

es ahora la identidad, luego

$$I_n = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} = \frac{\partial \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} = Z(t_0),$$

que es la condición inicial.

4.7.5 Con las notaciones que venimos utilizando se verifica que

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial t_0} = -\frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0).$$

En efecto, basta comprobar que la función de t que aparece en el segundo miembro es solución del mismo problema de Cauchy del que es solución la función de t del primer miembro.

4.7.6 Finalmente, consideremos la ecuación diferencial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}),$$

dependiente ahora del parámetro $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ y donde \mathbf{f} es de nuevo una función continua con derivadas parciales continuas. Consideremos como en el teorema 4.6.7 la función $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}}(t)$, y el abierto U en el que está definida. Las ecuaciones para las anteriores derivadas parciales se convierten ahora en

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial y_j} \right] \cdot \mathbf{z}, \\ \mathbf{z}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} Z' = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial y_j} \right] \cdot Z, \\ Z(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Denotemos ahora por $Z(t)$ la función matricial $n \times m$ (o sea, de n filas y m columnas)

$$Z(t) = \frac{\partial \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \left[\frac{\partial y_i(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_k} \right]$$

(función con llegada en $\mathbb{R}^{n \times m}$ y considerada con t_0 , \mathbf{y}_0 y $\boldsymbol{\mu}$ fijos en el intervalo $I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}}$). Entonces esta función es solución del problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' = \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial y_j} \right] \cdot Z + \left[\frac{\partial f_i(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_k} \right], \\ Z(t_0) = 0_{n \times m}. \end{array} \right.$$

En efecto, una vez más, el intercambio de $\partial/\partial t$ con $\partial/\partial \boldsymbol{\mu}$ y la aplicación de la regla de la cadena nos lleva a

$$Z'(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{y}} \cdot Z + \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}}.$$

Además, la función

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$$

es constante ($\equiv \mathbf{y}_0$), luego

$$0_{n \times m} = \frac{\partial \mathbf{h}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \mathbf{y}(t_0, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = Z(t_0),$$

que es la condición inicial impuesta.

Nótese que la ecuación variacional que aparece aquí es no homogénea.

4.7.7 Como se ve, la ecuación variacional lineal interviene para todas las derivadas parciales consideradas, si bien con diferentes tamaños de la función incógnita y, a veces, no homogénea.

Estas fórmulas no son obvias ahora, pero nos resultarán más asequibles tras los capítulos dedicados al estudio de los sistemas diferenciales lineales. Su importancia radica sobre todo en que es posible averiguar el comportamiento de las diferentes derivadas parciales en puntos $(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$ de la solución $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$, sin saber lo que ocurre para valores de t_0 , de \mathbf{y}_0 y de $\boldsymbol{\mu}$ fuera de los que interesan. Su inconveniente es que hace falta conocer en cualquier caso el comportamiento de la solución $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu})$ para los distintos valores de t en el intervalo $I_{t_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\mu}}$ y, posteriormente, resolver una ecuación diferencial lineal, lo que no siempre es posible.

4.7.8 Ejemplo. Para

$$y' = (y - 1)(t + y^2)$$

la función $y(t) \equiv 1$ es solución. O sea, sabemos que

$$y(t, t_0, 1) = 1$$

para todo t, t_0 . Además,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y + t,$$

luego,

$$\frac{\partial f(t, y(t, t_0, 1))}{\partial y} = \frac{\partial f(t, 1)}{\partial y} = 1 + t.$$

Por lo tanto, la ecuación variacional es

$$z' = (1 + t)z.$$

Ya sabemos resolverla; su solución es

$$z(t) = c e^{(1+t)^2/2}.$$

La solución de la ecuación variacional homogénea con

$$z(t_0) = -f(t_0, 1) = 0$$

es

$$z(t) \equiv 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial y(t, t_0, 1)}{\partial t_0} \equiv 0$$

para todo t, t_0 , como también podíamos haber visto derivando directamente la fórmula de las soluciones que ya conocemos.

La solución con

$$z(t_0) = 1$$

es

$$z(t) = e^{(t^2+2t-t_0^2-2t_0)/2}.$$

O sea,

$$\frac{\partial y(t, t_0, 1)}{\partial y_0} = e^{(t^2+2t-t_0^2-2t_0)/2},$$

y esto no podía averiguarse únicamente con la fórmula de las soluciones que conocíamos.

4.7.9 Ejemplo. Para el sistema

$$\begin{aligned}x' &= x(1-x) + y, \\y' &= y(1-y),\end{aligned}$$

sabemos que

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es solución. O sea, sabemos que

$$\mathbf{v}(t, t_0, (0, 0)) = (0, 0)$$

para todo t, t_0 .

Además

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1-2x & 1 \\ 0 & 1-2y \end{bmatrix},$$

luego

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, t_0, \mathbf{v}(t, t_0, (0, 0)))}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, t_0, (0, 0))}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, la ecuación variacional es

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

La solución general de dicha ecuación (para vectores de tamaño 2) es

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 te^t \\ c_2 e^t \end{bmatrix}$$

Para la condición inicial

$$\mathbf{z}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, (0, 0)) = (0, 0),$$

obtenemos la solución $\mathbf{z}(t) \equiv (0, 0)$, luego

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t, t_0, (0, 0))}{\partial t_0} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De nuevo podíamos haber obtenido esta misma conclusión derivando la fórmula de $\mathbf{v}(t, t_0, (0, 0))$. Esto no puede hacerse, con nuestros conocimientos, para la derivada $\partial \mathbf{v}(t, t_0, (0, 0)) / \partial \mathbf{y}_0$, derivada que vamos a obtener mediante la ecuación variacional.

La solución de

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z, \quad Z(t_0) = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$Z(t) = \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & (t-t_0)e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix},$$

luego

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t, t_0, (0, 0))}{\partial \mathbf{y}_0} = \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & (t-t_0)e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix}.$$

4.7.10 Ejercicios.

1 Considérese la ecuación lineal

$$y' + y = \mu.$$

Denotemos por $y(t, t_0, y_0, \mu)$ el valor en t de la solución de dicha ecuación que pasa por (t_0, y_0) .

a) Cálculense las derivadas

$$\frac{\partial y}{\partial t_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

sin calcular explícitamente las soluciones de la ecuación.

b) Compruébese el resultado, calculando ahora de forma explícita la solución $y(t, t_0, y_0, \mu)$.

2 Se considera en $[0, +\infty)$ la ecuación

$$y' = \mu + t y^2. \quad (4.6)$$

a) Fíjese un valor concreto, μ_0 , del parámetro para el que el que se pueda resolver elementalmente la ecuación (4.6). Obténganse, en este caso, todas las soluciones.

b) Pruébese que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el problema

$$y' = \mu + t y^2, \quad y(0) = \alpha$$

admite una única solución. Supondremos fijado α , y denotaremos por $y(t, \mu)$ el valor en t de la solución del precedente problema de Cauchy.

c) Calcúlese el valor

$$\frac{\partial y(t, \mu)}{\partial \mu}$$

de la segunda derivada parcial de $y(t, \mu)$ en un punto (t, μ_0) con t arbitrario (μ_0 es el valor de antes).

d) Pruébese que no puede existir una constante M para la que se verifique

$$|y(t, \mu) - y(t, \mu_0)| \leq M |\mu - \mu_0|$$

para todo valor de t .

3 Se considera la ecuación

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

definida por una función $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (que no depende más que de la segunda variable) en un abierto D de \mathbb{R}^{n+1} . Supondremos que \mathbf{f} es de clase \mathcal{C}^1 . Sea $\mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n}) \in D$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \neq 0$.

a) Denotemos, como siempre, por $\mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ la solución de la ecuación que vale \mathbf{y}_0 en t_0 . Sea f_1 la primera componente de \mathbf{f} . Supongamos que $f_1(\mathbf{y}_0) \neq 0$ y sea $\mathbf{y}_0^* = (y_{0,2}, \dots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ el punto \mathbf{y}_0 del que se ha suprimido la primera coordenada. Se considera la función, definida en un entorno de $(0, \mathbf{y}_0^*) \in \mathbb{R}^n$ y con llegada en \mathbb{R}^n , dada por

$$\tilde{\mathbf{y}}(t, y_2, \dots, y_n) = \mathbf{y}(t, 0, y_{0,1}, y_2, \dots, y_n).$$

Compruébese que

$$\tilde{\mathbf{y}}(0, \mathbf{y}_0^*) = \mathbf{y}_0$$

y que

$$\det \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}(0, \mathbf{y}_0^*)}{\partial (t, y_2, \dots, y_n)} \neq 0.$$

b) Dedúzcase entonces que existen un entorno, U , de $(0, \mathbf{y}_0^*)$ y un entorno, V , de \mathbf{y}_0 que son difeomorfos (o sea, que existe entre ellos una aplicación biyectiva tal que ella y su inversa son de clase \mathcal{C}^1).

c) Pruébese que el cambio de variable

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{z})$$

transforma la ecuación inicial en

$$\mathbf{z}' = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$