(Preprint for)

J. Rojo

*Soluciones analíticas vectoriales y numéricas de sistemas diferenciales*

Pub. de la Sección de Mat. Univ. de Valladolid, 4 (1981), pp. 45-60

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

# PUBLICACIONES
# de la
# SECCION DE MATEMATICAS

NUMERO 4

JUNIO 1981

# SOLUCIONES ANALITICAS VECTORIALES Y NUMERICAS DE SISTEMAS DIFERENCIALES

por

JESUS ROJO GARCIA

ABSTRACT:

We consider systems of linear equations

$$w^{1\prime} = a_1^1 w^1 + \ldots + a_n^1 w^n + b^1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w^{n\prime} = a_1^n w^1 + \ldots + a_n^n w^n + b^n$$

whose coefficients $a_i^j$ are complex-valued analitic functions, while the independent terms $b^1 \ldots b^n$ are analitic functions taking values on a locally convex space E.

We prove existence and uniqueness of analitic vector-valued solutions. In the homogeneus case, we establish the relations between the spaces of vectorial and scalar solutions.

## 1.- Existencia y Unicidad de la Solución

(1.1) Sea E un espacio localmente convexo sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, de Hausdorff y semi-completo. Representamos por $\mathcal{L}(E)$ el espacio de los endomorfismos continuos de E.

Sea D un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Sea $A : D \to \mathcal{L}(E)$

una aplicación, tal que para cada función analítica

$$w : D \to E$$
$$z \to w(z)$$

la función

$$Aw : D \to E$$

$$z \to A(z)\, w(z)$$

sea tambien analítica en D.

Sea $\qquad b : D \to E$

una función analítica en D.

Sea $z_o \in D$ y $w_o \in E$.

Consideraremos la ecuación diferencial lineal.

(1) $\qquad w' = Aw + b$

y la condición inicial

(2) $\qquad w(z_o) = w_o$

Una solución analítica en D de (1) es una función analítica $w : D \to E$ tal que para cada $z \in D$

$$w'(z) = A(z)w(z) + b(z)$$

Si además $w(z_o) = w_o$, diremos que la solución verifica la condición inicial (2).

(1.2) En general no existe solución de (1) verificando la condición inicial (2), incluso restringiendo el abierto D, como muestra el ejemplo siguiente.

(1.3) <u>Ejemplo</u>

Sea $E = \mathscr{E}(\mathbb{R})$ el espacio de Frechet de las funciones $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ con la topología dada por la familia de las seminormas

$$p_{K,k}(f) = \max_{j \le k} \max_{x \in K} |f^{(j)}(x)|$$

para los compactos K de $\mathbb{R}$ y los naturales k.

Sea D un disco del tipo

$$D = \{z \,/\, |z| < \gamma\}$$

con $\gamma > 0$.

Sea A el operador de derivación

$$A : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

$$g \to Ag = g^{(1)}$$

(ponemos

$$g^{(n)} = \frac{d^n g}{dx^n} \;)$$

Consideremos la ecuación

$$(3) \qquad w' = Aw$$

que es un caso particular de (1) en donde la aplicación

$$A : D \to \mathcal{L}(\mathcal{E}(R))$$

es constante en D e igual a A.

Sea $f \in \mathcal{E}(R)$ y consideremos la c.i.

$$(4) \qquad w(0) = f$$

Si suponemos que w es una solución analítica en D de (3) verificando (4), entonces admite un desarrollo

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n w_n$$

con convergencia absoluta en D y $w_o = f$.

Como $$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} w_n$$

y $$Aw(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n w_n^{(1)}$$

Para $n \geq 1$

$$n\, w_n = w_{n-1}^{(1)}$$

o sea para todo $n \geq 0$

$$w_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$$

y $$(5) \quad w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}$$

Veamos sin embargo que para determinada $f \in \mathcal{E}(R)$ la serie (5) posee radio de convergencia 0, lo que demostrará la inexistencia de solución analítica en 0 con la correspondiente condición inicial.

En efecto, sea $(\lambda_n)$ una sucesión de $\mathbb{R}^+$ tal que

$$\sqrt[n]{\lambda_n/n!} \to \infty$$

y sea $f \in \mathcal{E}(R)$ verificando para todo $n \geq 0$

$$f^{(n)}(0) = \lambda_n$$

(el teorema de BOREL, ver ZUILY [1], garantiza la existencia de tal función).

Sea p la semi-norma continua de $\mathcal{E}(R)$

$$p(g) = |g(0)|$$

Entonces $\quad p(f^{(n)}/n!) = \lambda_n/n!$

luego

$$\lim \sqrt[n]{p(f^{(n)}/n!)} = \infty$$

y el radio de convergencia de (5) es 0.

(1.4.) Vamos a ocuparnos de un tipo particular de ecuaciones (incluso de sistemas) de la forma (1) para las cuales tendremos garantizada la existencia y unicidad de la solución verificando una condición inicial. Antes, daremos algunas notaciones.

(1.5) Si A es una matriz n x n con elementos en $\mathbb{C}$, pondremos

$$|A| = \max_{i,j} |a_i^j|$$

en donde $a_i^j$ representa el elemento de la columna i y la fila j de A.

Consideraremos el espacio producto $E^n$. Un elemento $\vec{w}$ de $E^n$ diremos que es un <u>n-vector</u>; si sus componentes son $w^1 \ldots w^n$ pondremos

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix}$$

Si p es una seminorma continua de E, representaremos también por p la semi-norma continua de $E^n$

$$p(w) = \max(p(w^1)\dots p(w^n)) \quad .$$

Identificaremos $A = (a_i^j)$ con el elemento de $\mathcal{L}(E^n)$ dado por

$$A\, w = \begin{bmatrix} a_1^1 \dots a_n^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_1^n \quad a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 w^1 + \dots + a_n^1 \; w^n \\ \vdots \\ a_1^n w^1 + \dots + a_n^n \; w^n \end{bmatrix}$$

Se tiene para cada seminorma continua p de E

$$\cdot \; p(Aw) \leq n|A| \; p(w)$$

(1.6) En lo que sigue, D será un abierto conexo de $\mathbb{C}$, A una matriz n x n cuyos elementos son funciones

$$a_i^j : D \to \mathbb{C}$$

analíticas en D.

Para cada $z \in D$, A(z) representa la matriz n x n con elementos en $\mathbb{C}$, cuyo elemento genérico es $a_i^j(z)$. b será una función

$$b : D \to E^n$$

analítica en D, es decir, de componentes $b^1 \dots b^n$ analíticas en D.

Si $$w : D \to E^n$$

es una función analítica en D, la función Aw es analítica en D.

$\overset{\circ}{w}_o$ será un elemento de $E^n$, $z_o$ un punto de D.

(1.7) Consideremos el sistema

$$(6) \qquad w' = Aw + b$$

con la condición inicial

(7) $w(z_o) = w_o$

es decir

$$w^{1'} = a_1^1 w^1 + \ldots + a_n^1 w^n + b^1$$
$$\ldots\ldots$$
(6 bis) $w^{n'} = a_1^n w^1 + \ldots + a_n^n w^n + b^n$

(7 bis) $w^1(z_o) = w_o^1 \ \ldots \ w^n(z_o) = w_o^n$

Una solución analítica del sistema (6) con la c.i (7) será una función $w : D \to E^n$ analítica en D verificando

$$w'(z) = Aw(z) + b(z) \quad y \quad w(z_o) = w_o$$

Veremos que si D es simplemente conexo una tal solución existe y es única.

El teoerema que sigue es el primer paso para ello. Su demostración es una simple adaptación de la que figura en HENRICI [1] para el caso escalar. Las diferencias impuestas por el empleo de las semi-normas aconsejan, sin embargo, rehacerla.

(1.8) TEOREMA

*Si D es el disco $D = \{z / |z| < \gamma\}$ con $\gamma > 0$, existe una solución analítica de (6) verificando la c.i. del tipo (7) $w(0) = w_0$.*

Se tiene para todo $z \in D$

$$A(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l A_l \qquad b(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l b_l$$

Si w es una solución

(8) $$w(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^l w_l$$

en donde $w_o$ es el n-vector de la c.i. y

(9) $$(l+1) w_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} A_k w_{l-k} + b_l$$

luego los $w_l$ están todos unívocamente determinados, lo que prueba la unicidad.

Pasemos a resolver la cuestión de la existencia. Consideremos la serie formal

$$(10) \qquad \sum_{l=0}^{\infty} z^l w_l$$

con $w_o$ el n-vector de la c.i. y los $w_l$ para $l \geq 1$ dados por (9).

Sea p una semi-norma continua de E y sea $\rho > \gamma$. Se tienen las desigualdades de CAUCHY

$$|A_l| \leq \frac{\alpha}{\rho^l} \qquad p(b_l) \leq \frac{\beta}{\rho^l}$$

(para la segunda, ver PEREZ-GOMEZ [1]).

Resulta pues para todo l

$$\begin{aligned}(l+1)\ p(w_{l+1}) &\leq \sum_{k=0}^{l} p(A_k\, w_{l-k}) + p(b_l)\\ &\leq \sum_{k=0}^{l} n\,|A_k|\,p(w_{l-k}) + p(b_l)\\ &\leq \sum_{k=0}^{l} \frac{\alpha'}{\rho^k}\ p(w_{l-k}) + \frac{\beta}{\rho^l}\end{aligned}$$

en donde hemos puesto $\alpha' = n\,\alpha$.

Definimos entonces por recurrencia la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ por

$$a_o = p(w_o) \qquad (l+1)\ a_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} \frac{\alpha'}{\rho^k}\, a_{l-k} + \frac{\beta}{\rho^l}$$

y se tiene para cada l

$$p(w_l) \leq a_l$$

La serie

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, z^l$$

tiene radio de convengercia $\geq \rho$ (HENRICI [1] ) luego

$$\limsup \sqrt[l]{a_l} \leq 1/\rho$$

y

$$\limsup \sqrt[l]{p(w_l)} \leq 1/\rho$$

Esto, para cada $\rho < \gamma$ luego

$$\limsup \sqrt[l]{p(w_l)} \leq 1/\gamma$$

En consecuencia

$$\sup_p (\limsup \sqrt[l]{p(w_l)}) \leq 1/\gamma$$

en donde el sup se toma para las seminormas continuas de E.

La serie (10) posee entonces radio de convergencia $\geq \gamma$, y la función analítica que define (8) es, gracias a (9) una solución de (6) con la c.i. $w(0) = w_o$.

(1.9) COROLARIO.

*Si $D$ es el disco $D = \{z \,/\, |z-z_0| < \gamma\}$ con $\gamma > 0$, existe una solución analítica de (6) única, verificando la c.i(7).*

(1.10) COROLARIO.

*Si $D$ es un abierto simplemente conexo, existe una solución analítica de (6) única, verificando la c.i. (7).*

Se considera la solución en un disco alrededor de $z_o$ y se extiende por prolongación analítica.

## 2.- Relación entre soluciones vectoriales y numéricas.

(2.1) Las soluciones del sistema (6) se obtienen como suma de una solución particular de (6) con las soluciones del sistema homogéneo asociado

$$w' = Aw$$

Dado que la matriz A es escalar, es posible considerar en el caso homogéneo soluciones escalares del sistema. Vamos a estudiar las relaciones entre estas soluciones escalares y las soluciones vectoriales.

(2.2) Sea D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y consideremos el sistema homogéneo

$$(11) \qquad w' = Aw$$

en donde A es una matriz del tipo descrito en (1.6).

Las soluciones analíticas

$$w : D \to E^n.$$

de (11) las llamaremos <u>soluciones vectoriales</u>.

Llamaremos <u>soluciones numéricas</u> de (11) a las soluciones analíticas para $E = \mathbb{C}$.

Las soluciones vectoriales de (11) forman un espacio vectorial sobre C, de la misma forma que las soluciones numéricas.

La solución $w(z) \equiv 0$ diremos que es la <u>solución trivial</u> de (11).

(2.3) <u>PROPOSICION</u>

*Si E tiene dimensión algebraica $\alpha$, el espacio vectorial de las soluciones vectoriales de (11) posee dimensión $n\alpha$.*

Sea $(e_i)_{i\in B}$ (con card $B = \alpha$ ) una base de E.

Para cada $i\in B$ y cada $j \in \{1...n\}$ ponemos

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j$$

es decir,

$$\mathrm{proy}_k(e_{ij}) = \delta_j^k \, e_i$$

Entonces, la familia $(e_{ij})_{ij}$ (de cardinal $n\alpha$) es una base de $E^n$.

Sea $z_o \in D$. Para cada $i \in B$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ designamos por $w_{ij}$ la solución de (11) verificando la c.i.

$$w_{ij}(z_o) = e_{ij}$$

Los $(w_{ij})_{ij}$ forman una base del espacio vectorial de las soluciones vectoriales de (11).

En efecto, si $w_o \in E^n$ y $w_o = \Sigma\, \mu_{ij}\, e_{ij}$, entonces $w = \Sigma\, \mu_{ij}\, w_{ij}$ es la solución de (11) verificando la condición inicial $w(z_o) = w_o$

Por otra parte, si $\Sigma\, \mu_{ij}\, w_{ij} = 0$ entonces $\Sigma\, \mu_{ij}\, e_{ij} = 0$ luego $(\forall i)(\forall j)\mu_{ij} = 0$.

(2.4) PROPOSICION

*Sea $(W_i)_{i\in I}$ una familia de soluciones de (11). Se tiene la equivalencia de:*

*(i)* $(w_i)_{i\in I}$ *es libre*

*(ii)* $(\exists z_o \in D)$ $(w_i(z_o))_{i\in I}$ *es libre*

*(iii)* $(\forall z \in D)$ $(W_i(z))_{i\in I}$ *es libre*

Se prueba sin dificultad que (i) => (iii) => (ii) => (i) gracias a la propiedad de unicidad del teorema (1.8).

(2.5) Si

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

y $e \in E$, representamos por $\lambda\varepsilon$ el n-vector

$$\lambda e = \begin{bmatrix} \lambda^1 e \\ \vdots \\ \lambda^n e \end{bmatrix}$$

(2.6) PROPOSICION

*a) Sea $\lambda(z)$ una solución numérica de (11) y $e \in E$.*

*Entonces* $\quad w(z) = \lambda(z) e$

*es una solución vectorial de (11)*

*b) Sea $w(z)$ una solución vectorial de (11) y sea $\phi \in E'$.*

*Entonces*

$$\lambda(z) = \begin{bmatrix} \phi \circ w^1(z) \\ \vdots \\ \phi \circ w^n(z) \end{bmatrix}$$

*es una solución numérica de (11).*

a) Cada $\lambda^i(z)e$ es holomorfa y

$$w^{i'}(z) = \lambda^{i'}(z)e$$

luego

$$w'(z) = \lambda'(z)e = A(z)\,\lambda(z)e = A(z)w(z)$$

b) Cada

$$\lambda^i(z) = \phi_\circ\, w^i(z)$$

es holomorfa y

$$\begin{aligned} \lambda^{i'}(z) &= \phi\left[w^{i'}(z)\right] \\ &= \phi\left[a_1^i(z)w^1(z)+\ldots+a_n^i(z)w^n(z)\right] \\ &= a_1^i(z)\phi_\circ w^1(z)+\cdots+a_n^i(z)\,\phi_\circ w^n(z) \\ &= a_1^i(z)\,\lambda^1(z)+\ldots+a_n^i(z)\,\lambda^n(z) \end{aligned}$$

luego

$$\lambda'(z) = A(z)\,\lambda(z)$$

(2.7) COROLARIO

*Supongamos $E \neq \{0\}$*

*Sea $\lambda(z)$ una solución numérica de (11).*

*Existe entonces una solución vectorial w(z) de (11) y $\phi \in E'$ tales que*

$$\lambda(z) = \begin{bmatrix} \phi \circ w^1(z) \\ \vdots \\ \phi \circ w^n(z) \end{bmatrix}$$

En efecto; sea $e \in E$, $e \neq 0$. Consideremos la solución vectorial

$$w(z) = \lambda(z)e$$

Basta tomar $\phi \in E'$ tal que $\phi(e) = 1$.

(2.8) Veamos ahora como cualquier solución vectorial de (11) puede obtenerse a partir de soluciones numéricas.

Sea $z_o \in D$. Representemos por $\lambda_i(z)$ la solución numérica verificando la condición inicial.

$$\lambda_i(z_o) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

Sea $\Lambda$ la matriz n x n de funciones analíticas en D cuyas columnas son las $\lambda_i(z)$, o sea

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1^1(z) \dots & \lambda_n^1(z) \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n(z) & \lambda_n^n(z) \end{bmatrix}$$

Sea $w_o \in E^n$,

$$w_o = \begin{bmatrix} w_o^1 \\ \vdots \\ w_o^n \end{bmatrix}$$

Llamemos w(z) a la solución vectorial de (11) que verifica la condición inicial $w(z_o) = w_o$.

Como

$$\lambda_1(z)w_o^1 + \dots + \lambda_n(z)w_o^n$$

es una solución de (11) tomando en $z_o$ el valor $w_o$, se tiene a causa de la unicidad

$$w(z) = \lambda_1(z)\, w_o^1 + \ldots + \lambda_n(z) w_o^n$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^1(z) w_o^1 + \ldots + \lambda_n^1(z) w_o^n \\ \lambda_1^n(z) w_o^1 + \ldots + \lambda_n^n(z) w_o^n \end{bmatrix}$$
$$= \Lambda(z) w_o$$

se tiene pues

(2.9) <u>PROPOSICION</u>

*Las soluciones vectoriales de (11) se obtienen multiplicando la matriz $\Lambda$ por un n-vector.*

*De manera más precisa, la solución de (11) verificando la c.i $w(z_o) = w_o$ es*

$$w(z) = \Lambda(z) w_o$$

(2.10) Más generalmente, se tiene

<u>TEOREMA</u>

*Sea M una matriz numérica fundamental del sistema (11), es decir una matriz n x n de funciones analíticas cuyas columnas son n soluciones numéricas, linealmente independientes, de (11).*

*Entonces, las soluciones vectoriales de (11) vienen dadas por*

(12) $$w(z) = M(z)\, w_o$$

*cuando $w_o$ recorre $E^n$.*

En efecto, si $w_o \in E^n$ y

$$w(z) = M(z)\, w_o$$

se tiene

$$w'(z) = M'(z)w_o = A(z)M(z)w_o = A(z)w(z)$$

y $w(z)$ es una solución de (11).

Recíprocamente, sea $w_o \in E^n$ y sea $w(z)$ la solución vectorial de (11) verificando la c.i. $w(z_o) = w_o$. Entonces

$$w(z) = \Lambda(z)w_o$$

Pero $$\Lambda(z) = M(z)C$$

con C una matriz n x n con elementos en $\mathbb{C}$ y det $C \neq 0$, luego

$$w(z) = M(z)C\, w_o$$

y $Cw_o \in E^n$, luego $w(z)$ es de la forma (12).

(2.11) Además

$$I = \Lambda(z_o) = M(z_o)C$$

luego $$C = [M(z_o)]^{-1}$$

lo que permite el cálculo de C y del n-vector $Cw_o$.

(2.12) El teorema (2.10) resuelve en cierta manera el problema de la dimensión (infinita si lo es la de E) del espacio de las soluciones vectoriales.

Un conjunto de n soluciones numéricas linealmente independientes actúa, en el sentido de la expresión (12) como una "base" del espacio de las soluciones vectoriales, siendo las "coordenadas" de una solución vectorial, vectores de E.

Estas "coordenadas" son únicas, pues la aplicación lineal

$$w_o \to M(z)w_o$$

de $E^n$ en el espacio de las soluciones vectoriales es inyectiva. En efecto, si

$$M(z)w_o \equiv 0$$

se tiene

$$M(z_o)w_o = 0$$

y

$$w_o = [M(z_o)]^{-1} M(z_o)w_o = 0$$

<u>BIBLIOGRAFIA</u>:


GODUNOV,A.N.

(1) "A counterexample to Peano´s theorem in an infinite dimensional Hilbert space". Vestnik Moskovskogo Universitateta Matematika. 27 (1972) p.31-34.

HENRICI,P.

(1) "Applied and Computational Complex Analysis" Vol II Wiley (New York) (1977).

HILLE,E.

(1) "Ordinary Differential Equations in the Complex Domain" Wiley (New York), (1976).

PEREZ GOMEZ,A.

(1) "Desarrollos asintóticos de series potenciales y transformadas integrales en un e.v.t." (Tesis) Revista Mat. Hispano-Americana, 34 y 35 (1974 y 1975).

(2) "Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en e.v.t. localmente convexos". Revista de la R.A. de Ciencias Ex.Fis. y Nat. 69 (1975) p. 533-547.

ZUILY,C.

(1) "Problèmes de Distributions". Hermnn (Paris), 1978.

Noviembre de 1.980

Dpto. de Teoría de Funciones.

Universidad de Valladolid.