(Preprint for)

J. Rojo
Soluciones analíticas vectoriales y numéricas de sistemas diferenciales, II
Pub. de la Sección de Mat. Univ. de Valladolid, 5 (1982), pp. 63-68

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

PUBLICACIONES
de la
SECCION DE MATEMATICAS

NUMERO 5 JUNIO 1982

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
PUBLIC. DE LA SECC. DE MATEMATICAS
Nº 5 – JUNIO 1.982

SOLUCIONES ANALITICAS VECTORIALES Y NUMERICAS DE SISTEMAS DIFERENCIALES (II

por

JESUS ROJO GARCIA

ABSTRACT:

Let E be a locally convex space.We study in this paper the behaviour of E-valued solutions of a homogeneous system

$$w' = A w$$

where A is a matrix whose elements are analytic complex-valued functions (see [3]) in a punctured disk.

3.-Comportamiento de las soluciones en un punto singular.

3.1) Sea E un e.l.c. Hausdorff y semi-completo. Se considera el sistema homogéneo

(1) $w' = A w$

donde $A(z) = (a_i^j(z))$ es una matriz $n{\times}n$ cuyos elementos son funciones, a valores complejos, analíticas en un abierto D del plano complejo. Una solución vectorial de (1) es una función analítica

$$w: D \longrightarrow E^n$$

verificando (1); una solución numérica es una función analítica

$$\lambda : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

verificando (1). Las relaciones entre ambos tipos de soluciones han sido estudiadas en [3] ; enviamos también a dicho artículo para precisar la terminología y la notaciones.

(3.2) Abordamos en el presente artículo algunos aspectos del caso en que D es un disco punteado, o más exactamente el disco

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 < |z| < r\}$$

(los razonamientos se extienden sin dificultad a cualquier disco punteado con centro en un punto de $\mathbb{C}$). Supondremos que 0 es un punto singular de A , o sea, de alguna de las a_i^j .

El teorema (1.2) de [3] no es válido en este caso, y en general no podemos esperar que existan soluciones analíticas no triviales de (1) extendidas a D. Por el contrario, 0 será en general un punto de ramificación (algebraico o logarítmico) de las soluciones.

(3.3) Existen para el sistema (1) matrices numéricas fundamentales de la forma

$$M(z) = P(z)\, z^C$$

donde la matriz $P(z)$ es analítica en D , C es una matriz constante y

$$z^C = e^{C \log z}$$

(véase [1] , pág. 71 y [2] pág. 108). Cada determinación analítica de $\log z$ en un abierto simplemente conexo N de D convierte a $M(z)$ en una matriz numérica fundamental sobre N .

Si $P(z)$ posee a lo sumo un polo en 0, se dice que 0 es un "punto singular regular" del sistema (1); tal es el caso si se supone que la matriz A del sistema posee a lo sumo un polo de orden 1 en 0.

3.4 Supongamos que 0 es un punto singular regular del sistema (1). Vamos a probar que, entonces, las soluciones vectoriales del sistema poseen en 0 un comportamiento polar.

Sea

$$w(z) = \begin{bmatrix} w^1(z) \\ \vdots \\ w^n(z) \end{bmatrix}$$

una solución analítica vectorial de (1) en el abierto N resultante de suprimir en D una semirrecta con origen en 0. El teorema (2.10) que probamos en [3] nos asegura que

$$w(z) = M(z)\, w_0$$

en donde $M(z)$ es una matriz numérica fundamental en N y

$$w_0 = \begin{bmatrix} w_0^1 \\ \vdots \\ w_0^n \end{bmatrix} \in E^n .$$

Ahora bien, las columnas de $M(z)$ son soluciones numéricas

$$\lambda_i(z) = \begin{bmatrix} \lambda_i^1(z) \\ \vdots \\ \lambda_i^n(z) \end{bmatrix}$$

del sistema en N. Dado que existe en N una determinación continua y acotada de $\arg z$, resulta del teorema 9.4c de [2] que para cada solución $\lambda_i(z)$ existe un número real a_i tal que

$$|z|^{a_i} \lambda_i(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow 0$ en N. Si $a = \max(a_1,\ldots,a_n)$, resulta entonces que

$$|z|^a \lambda_i(z) \longrightarrow 0 \quad i=1,\ldots,n.$$

Veamos ahora que para la solución vectorial $\mathbf{w}(z)$,

$$|z|^a w(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow 0$ en N. En efecto, siendo p una seminorma continua de E y $p\circ\pi_i$ la correspondiente seminorma en E^n, se tiene

$$\begin{aligned}|z|^a p\circ\pi_i(\mathbf{w}(z)) &= |z|^a p\circ\pi_i(M(z)\mathbf{w}_0)\\ &= |z|^a p(\lambda_1^i(z)w_0^1+\ldots+\lambda_n^i(z)w_0^n)\\ &\leq |z|^a \max(|\lambda_1^i(z)|,\ldots,|\lambda_n^i(z)|)\sum_{i=1}^{n} p(w_0^i)\\ &\leq |z|^a \max(\|\lambda_1(z)\|,\ldots,\|\lambda_n(z)\|)\sum_{i=1}^{n} p(w_0^i),\end{aligned}$$

y esto permite obviamente obtener la conclusión. Hemos probado así la

3.5) PROPOSICION

Se considera el sistema (1) y se supone que 0 es un punto singular regular del sistema. Para toda solución vectorial $w(z)$ de (1) en el abierto N (que es D menos una semirrecta con origen en 0), existe un número real a tal que

$$|z|^a w(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow 0$ en N.

3.6) COROLARIO

Si $w(z)$ es una solución vectorial de (1) en el disco punteado D, entonces $w(z)$ posee a lo sumo un polo en 0.

El corolario resulta de manera sencilla de la proposición precedente, pues existe un número real a tal que $|z|^a w(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow 0$ en D, como puede verse tomando $N_1 = D - \{z \,/\, z \geq 0\}$ y $N_2 = D - \{z \,/\, z \leq 0\}$.

(3.7) Observemos por fin que los resultados precedentes no se extienden tampoco a las ecuaciones del tipo

$$w' = A\,w$$

cuando

$$A : D \longrightarrow L(E)$$
$$z \longrightarrow A(z)$$

es una función analítica para la que los operadores $A(z)$ son endomorfismos continuos cualesquiera (véase también el ejemplo (1.3) de [3]); el ejemplo que sigue confirma esta observación.

(3.8) <u>Ejemplo</u>

Sea $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto, $D = \mathbb{C}-\{0\}$ y

$$A : D \longrightarrow L(E)$$

la función constante dada por

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

es decir, si $w = (w_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$A(z)\,w = (-w_2, -2w_3, -3w_4, \ldots) .$$

Para la ecuación en D

$$w'(z) = A(z)w(z) ,$$

equivalente a

$$(\forall n) \quad w_n'(z) = -n w_{n+1}(z) ,$$

la función analítica en D con valores en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} e_n$$

donde $e_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots\ldots)$) es solución y además la única solución que verifica la condición inicial

$$w(1) = (1,1,1,\ldots\ldots) \quad .$$

Sin embargo, dicha solución posee en 0 una singularidad esencial, a pesar de la regularidad de A .

BIBLIOGRAFIA

[1] HARTMAN, P.
"Ordinary Differential Equations". Wiley (New York).-(1964).

[2] HENRICI, P.
"Applied and Computational Complex Analysis" Vol. II. Wiley (New York).-(1977)

[3] ROJO GARCIA, J.
"Soluciones analíticas vectoriales y numéricas de sistemas diferenciales". Publicaciones de la Sección de Matemáticas (Valladolid), número 4.-(1981) .

Febrero de 1982

E.T.S. de Ingenieros Ind.
Universidad de Valladolid
y
Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Valladolid