(Preprint for)

M. Núñez y J. Rojo

Absorcion de energía por resonancia Alfvénica en una configuración unidimensional de plasma

pp. 535-539 in
II Congreso de Matemática Aplicada / XII CEDYA,
Oviedo-Gijon, 1991

ABSORCION DE ENERGIA POR RESONANCIA ALFVENICA EN UNA CONFIGURACION UNIDIMENSIONAL DE PLASMA

Manuel Núñez

Departamento de Análisis Matemático

Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid

47005 Valladolid, Spain

Jesús Rojo

Departamento de Matemática Aplicada a la Técnica

E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid

47011 Valladolid, Spain

Abstract

Small perturbations of a equilibrium plasma satisfy the linearized magnetohydrodynamics equations. These form a mixed elliptic-hyperbolic system that in a straight-field geometry and for a fixed time frequency may be reduced to a single scalar equation $\mathrm{div}(A_1 \nabla u) + A_2 u = 0$, where α_1 may have singularities in the domain U of definition. We study the case where U is a half-plane and u possesses high Fourier components, analyzing the changes brought about by the singularity $A_1 = \infty$. We show that absortion of energy takes place precisely at this singularity, that the solutions have a near harmonic character and the integrability characteristics of the boundary data are kept througout U.

AMS (MOS) Subject Classification: 76W05, 34E05

1 Introduction

Supongamos que un plasma en reposo llena el semiespacio $U : x > 0$, y que tanto la densidad, ρ, del mismo como el campo magnético presente, $\mathbf{B} =$

$(0,0,B)$, dependen tan sólo de la coordenada x. Supongamos también que el plasma satisface la ecuación de estado de los gases politrópicos, $p = S\,\rho^\gamma$, donde p es la presión y S y γ son constantes. Consideremos una pequeña perturbación inducida por una corriente superficial en el plano $x = -h$, y, tras tomar componentes de Fourier, denotemos por $p_\star = p_\star(x,y)e^{i\,\omega t + i\,lz}$ la presión total (cinética y magnética) perturbada. Entonces $p_\star$ satisface la ecuación linealizada de la Magnetohidrodinamica,

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\omega^2\rho - l^2B^2}\,\nabla p_\star\right) - \frac{l^2}{(1+\frac{B^2}{\gamma\,p})}\,\frac{1}{\omega^2\rho(1+\frac{B^2}{\gamma\,p}) - l^2B^2}\,p_\star = 0\,, \qquad (1)$$

que es singular en los puntos que verifican

$$f_1(x) = \omega^2\rho(x) - l^2B^2(x) = 0\,, \qquad (2)$$

y también donde

$$f_2(x) = \omega^2\rho(x)\left(1+\frac{B^2(x)}{\gamma\,p(x)}\right) - l^2B^2(x) = 0\,. \qquad (3)$$

En el caso incomprensible ($\gamma \to \infty$) ambos coinciden. Generalmente, sin embargo, γ se toma como $5/3$ y el promedio p/B^2 (denominado 'beta' del plasma) es bajo, de modo que para l fijo los valores de ω para los que se verifica (3) en algún punto de U son mucho menores que aquéllos para los que se verifica (2). Consideremos un valor de ω tal que existen ceros de f_1 en U, pero no de f_2. Esta elección no es una hipótesis que pretenda simplificar el problema, sino que es clave para la descripción de varios importantes fenómenos físicos. Los valores de ω tales que f_1 se anula en algún punto de U se denominan 'frecuencias de Alfvén'; una perturbación externa de frecuencia ω resuena con los puntos del plasma donde f_1 se anula, y, como veremos, se produce en dichos puntos absorción de energía por el plasma. El calentamiento del plasma por ondas de Alfvén, con su posible aplicación a la fusión nuclear, fué propuesto por Grad [1] y su mecanismo físico ha sido analizado en profundidad [2, 3]. Asimismo, las pulsaciones geomagnéticas de período largo son atribuídas a la resonancia alfvénica [4, 5]. El análisis de la ecuación (1) para dichas frecuencias puede contribuir a la comprensión cuantitativa del fenómeno. Nos limitaremos a estudiar soluciones con componentes de Fourier altas en y, lo que aparece con corrientes superficiales localizadas en torno a las líneas del campo magnético. Este caso es interesante por dejar la estructura del plasma relativamente intacta, [2], y porque ciertas ondas características aparecen en el mismo, [6]. Dada la brevedad del texto, no haremos demostraciones de los resultados del mismo, sino que indicaremos concisamente el modo de abordar dichos resultados. La totalidad del trabajo aparecerá posteriormente.

2 Principales resultados

Proposition 1 *La densidad de corriente superficial,* $\mathbf{j}$*, determina los valores*

$$\frac{\partial p_\star}{\partial x}(0, y)$$

para todo y*.*

La demostración se basa en las ecuaciones de Maxwell: el carácter irrotacional y selenoidal del campo magnético en el vacío, el comportamiento del campo en la frontera entre dos medios distintos, y la continuidad en la misma de la presión total.

Si denotamos las expresiones

$$\omega^2\rho - l^2B^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{l^2}{(1+\frac{B^2}{\gamma\, p})}\,\frac{\omega^2\rho - l^2B^2}{\omega^2\rho(1+\frac{B^2}{\gamma\, p}) - l^2B^2} \tag{4}$$

por f y g respectivamente, y denominamos P a la transformada de Fourier de $p_\star$ respecto de y con variable k, (1) se transforma en

$$P'' - \frac{f'}{f}P' - (k^2+g)P = 0 \tag{5}$$

La aproximación WKB a la solución de esta ecuación resulta ser

$$P_W(x,k) = e^{\sigma k x}|f(x)|^{1/2}, \tag{6}$$

donde σ vale 1 o -1. Esta aproximación no es válida en los puntos singulares de la ecuación que, de acuerdo con nuestras suposiciones iniciales, son los ceros de f. Para simplificar supondremos que f posee un único cero, x_0, en un entorno del cual esta función es analítica. Con estas hipótesis obtenemos

Proposition 2 *En un entorno lo bastante pequeño de x_0, y para k lo bastante grande, dos aproximaciones independientes de primer orden a las soluciones de (5) son*

$$F : x \mapsto (x - x_0) I_1(|k|(x - x_0)), \quad G : x \mapsto (x - x_0) K_1(|k|(x - x_0)) \tag{7}$$

donde I_1 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de orden uno.

Dado que K_1 es una función multivaluada, es preciso estudiar su comportamiento en el punto singular x_0. Si tomamos G real para $r > 0$, se verifica

$$G(x_0 - r) = G(x_0 + r) + i\,\delta\pi F(x_0 + r) \tag{8}$$

donde $\delta = \pm 1$; el signo depende de la rama del logatitmo elegida. Por las propiedades de las transformadas de Fourier-Laplace, se verifica

Proposition 3 *δ es el signo de ω.*

Mediante el estudio de las propiedades asintóticas de las funciones de Bessel, [7, 8], deducimos

Theorem 4 *La solución WKB de (5) que se anula en $x = \infty$ sigue el esquema*

$$\begin{array}{lr}
e^{-|k|(x_0-x)}|f(x)|^{1/2} + i\,\mathrm{sgn}\,(\omega) e^{|k|(x_0-x)}|f(x)|^{1/2} \rightarrow & x < x_0 - \epsilon \\
\quad \rightarrow (2|k|f'(x_0)/\pi)^{1/2}(x_0 - x)K_1(|k|(x_0 - x)) + & \\
\qquad + i\,\mathrm{sgn}\,(\omega)(2\pi|k|f'(x_0))^{1/2}(x_0 - x)I_1(|k|(x_0 - x)) \rightarrow & x_0 - \epsilon < x < x_0 \\
\quad \rightarrow (2|k|f'(x_0)/\pi)^{1/2}(x - x_0)K_1(|k|(x - x_0)) \rightarrow & x_0 < x < x_0 + \epsilon \\
\quad \rightarrow e^{-|k|(x-x_0)}|f(x)|^{1/2} & x > x_0 + \epsilon
\end{array} \tag{9}$$

cuando recorremos $(0, \infty)$ cruzando x_0.

El promedio de absorción de energía por el plasma contenido en un volumen X viene dado por la fórmula

$$\frac{dW}{dt} = -\int_{\partial X} p_\star \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{10}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluído. En nuestro caso particular, si consideramos una banda $a \leq x \leq b$, y utilizando los resultados anteriores y las propiedades de la transformada de Fourier, obtenemos que tan sólo en las bandas que contienen a x_0 se da absorción de energía, y que la media de dicha absorción para k grande es

$$\langle \frac{dW}{dt} \rangle = \int_{|k|>k_0} 8\omega |I(\omega, k, l)|^2 e^{-2|k|(x_0+h)}\, dk \qquad (11)$$

donde I es la intensidad de la corriente superficial. Nótese la dependencia exponencial inversa respecto de k y de la distancia entre la hoja resonante y la corriente superficial.

References

[1] Grad, H.: Phys. Today **22**, p. 34 (1969)

[2] Chen, L., Hasegawa, A.: Plasma heating by spatial resonance of Alfvén wave. Phys. of Fluids **17**, 1399-1403 (1974)

[3] Tataronis, J., Talmadge, J.N., Shohet, J.L.: Alfvén wave heating in general toroidal geometry. Univ. of Wisconsin Report (1978)

[4] Chen, L., Hasegawa, A.: A Theory of long-period magnetic pulsations 1: Steady State excitation of field line resonance. J. of Geoph. Res. **79**, 1024-1037 (1974)

[5] Kivelson, M.G., Southwood, D.J.: Resonant ULF waves: A new interpretation. Geoph. Res. Letters. **12**, 49-52 (1985)

[6] Freidberg, J.P.: Ideal Magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems. Rev. of Modern Phys. **54**, 801-902 (1982)

[7] Bender, C.M., Orszag, S.A.: Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers. McGraw-Hill (1984)

[8] Olver, F.W.J.: Asymptotics and Special Functions. Academic Press (1974)