

1 Se desea construir un par encajado **RK2(3)**. Se quiere que el método de RUNGE-KUTTA de orden 3 sea el método de tablero

0			
2	2		
2/3	5/9	1/9	
	1/4	0	3/4

Búsqese un método de orden 2, que posea las dos primeras etapas o las tres etapas del método anterior, y que sea adecuado para completar el **RK2(3)**. Compruébese que el método obtenido es efectivamente conveniente para formar el par encajado. Escribese el resultado en la forma del cuadro habitual para los pares encajados.

(3 puntos)

2 Para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(l, t) = 0,$$

con el retículo habitual

$$(x_n, t_m), \quad x_n = n h, \quad n = 0, \dots, N, \quad t_m = m k, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

y poniendo el habitual

$$\lambda = \alpha^2 k / h^2,$$

se considera el método

$$u_{nm+1} - u_{nm-1} = 2 \lambda (u_{n+1m} - 2 u_{nm} + u_{n-1m}).$$

Dígase lo que asegura el método de FOURIER para el citado método en diferencias. Calcúlese, además, el orden del método.

(3 puntos)

3 Para un problema parabólico,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(l, t) = 0,$$

con condiciones de contorno homogéneas, consideramos los métodos 'hacia adelante' y 'hacia atrás' dados por

$$\frac{u_{nm+1} - u_{nm}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2}$$

y

$$\frac{u_{nm} - u_{nm-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2}$$

Se escribe el segundo para  $m + 1$  en lugar de  $m$  y se toma la media aritmética de ambos (con coeficientes  $1/2$  y  $1/2$ ), obteniéndose así el conocido método de CRANK-NICOLSON del que se sabe que es estable con independencia de las relaciones entre  $h$  y  $k$ , incrementos en las variables  $x$  y  $t$ .

Si se eligen ahora para la media los coeficientes  $2$  y  $-1$ , o bien los coeficientes  $-1$  y  $2$ , describese el método que resulta y lo que el método matricial afirma de la estabilidad en el caso (uno de los dos) que el alumno elija.

(2 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)