E.T.S. de Ingenieros Industriales **2006-07**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(06/07/2007)**

1 a) Recuérdese o calcúlese la función de estabilidad de los métodos de Runge-Kutta, explícitos, de dos etapas y de orden 2.
b) Para los métodos explícitos de Runge-Kutta, de tres etapas y tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

dígase cuándo tienen orden al menos 2. Calcúlese para estos métodos de orden 2 la función de estabilidad.
c) Compárese el error que se comete o, más exactamente, el término principal del error, cuando se integra el problema

$$y' = \lambda\, y\,, \quad y(0) = 1\,,$$

con un método del apartado a) y otro del apartado b).

(3 puntos)

2 Los métodos que llamaremos **RK1** y **RK2** son métodos de tipo Runge-Kutta, el primero de paso fijo y el segundo de paso variable. Se integra un problema test y se comparan los resultados numéricos obtenidos con los dos métodos. Para el primero, **RK1** , se emplean los pasos

$$\frac{1}{2^3} = 0.125\,, \frac{1}{2^4} = 0.0625\,, \frac{1}{2^5} = 0.0313\,, \frac{1}{2^6} = 0.0156\,,$$

lo que significa que los números de evaluaciones de función son

$$1580\,, 3160\,, 6330\,, 12670\,,$$

y se obtienen los errores

$$0.173265513 \cdot 10^{-3}\,, 0.921034842 \cdot 10^{-4}\,, 0.105803845 \cdot 10^{-5}\,, 0.264174164 \cdot 10^{-7}\,.$$

Para **RK2** se emplean las tolerancias

$$10^{-3}\,, 10^{-4}\,, 10^{-5}\,, 10^{-6}, 10^{-7}\,, 10^{-8}\,, 10^{-9}\,;$$

para ellas los números de evaluaciones de función son

$$180\,,308\,,524\,,816\,,1332\,,2264\,,3896\,,$$

y se obtienen los errores

$$0.120075671\cdot 10^{-1}\,,0.224069086\cdot 10^{-2}\,,0.293453270\cdot 10^{-3}\,,0.325178066\cdot 10^{-4}\,,$$

$$0.397930221\ \cdot 10^{-5}\,,0.436613469\ \cdot 10^{-6}\,,0.445225052\ \cdot 10^{-7}\,.$$

Tras realizar las gráficas de eficiencia y hallar el orden efectivo de los métodos, se explicará cuál es el que tiene mejor comportamiento en relación con los diferentes puntos de vista posibles.

(2 puntos)

3 Para un problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

con condiciones de contorno homogéneas, se ha estudiado en exámenes precedentes lo que el método de Fourier dice sobre la estabilidad del método

$$\frac{u_{n\,m+1} - u_{n\,m}}{k} = \frac{\alpha^2}{h^2}(\,-u_{n+1\,m}+2u_{n\,m}-u_{n-1\,m}+2u_{n+1\,m+1}-4u_{n\,m+1}+2u_{n-1\,m+1})\,.$$

La cuestión ahora es ver lo que el método matricial es capaz de decir acerca de la estabilidad de este método.

(3 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)