

1 a) Búsquense los métodos con el mayor orden posible para la familia de RUNGE-KUTTA implícitos del siguiente tablero

0	0	0
$2\alpha$	$\alpha$	$\alpha$
	$\beta$	$\beta$

donde  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ .

- b) Calcúlese la función de estabilidad para los métodos de la familia propuesta. También para los métodos del orden máximo alcanzable.  
c) Compruébese que dichos métodos de orden máximo son  $A$ -estables. Búsquese algún otro método de la familia que también sea  $A$ -estable, describiendo en este caso la región de estabilidad.

(3 puntos)

2 Para un problema parabólico, consideramos los métodos 'hacia adelante' y 'hacia atrás'. Escribimos el segundo para  $m + 1$  en lugar de  $m$  y obtenemos entonces un método numérico tomando la media aritmética de ambos, pero con coeficientes  $-1$  y  $2$ . El método resulta ser

$$\frac{u_{nm+1} - u_{nm}}{k} = \frac{\alpha^2}{h^2} (-u_{n+1m} + 2u_{nm} - u_{n-1m} + 2u_{n+1m+1} - 4u_{nm+1} + 2u_{n-1m+1}),$$

donde hemos usado las notaciones habituales. Construir matricialmente dicho método y estudiar la estabilidad del método utilizando el procedimiento matricial.

(3 puntos)

**3** Para comprobar la eficiencia de un método de tipo Runge–Kutta y de paso variable, que denotaremos por **m1**, se integra un problema test con este método y con otro de paso fijo, que denotaremos por **m2**. Para **m1**, de paso variable, se emplearon las tolerancia, se usó el número de evaluaciones y se obtuvieron los errores de la tabla número 1

tol	eval	error	$\log_{10}$ error
$10^{-3}$	180	$0.12007567110^{-1}$	-1.920544976
$10^{-4}$	308	$0.22406908610^{-2}$	-2.649618057
$10^{-5}$	524	$0.29345327010^{-3}$	-3.532461046
$10^{-6}$	816	$0.32517806610^{-4}$	-4.487878755
$10^{-7}$	1332	$0.39793022110^{-5}$	-5.400193076
$10^{-8}$	2264	$0.43661346910^{-6}$	-6.359902870
$10^{-9}$	3896	$0.44522505210^{-7}$	-7.351420406
$10^{-10}$	6824	$0.45556368510^{-8}$	-8.341450902
$10^{-11}$	11932	$0.47351959110^{-9}$	-9.324662047

**Table 1:** Método **m1**.

Para **m2**, de paso fijo, se emplearon los pasos, se usó el número de evaluaciones y se obtuvieron los errores de la tabla número 2

h	eval	error	$\log_{10}$ error
$1/2$	390	$0.10710061210^{-1}$	-1.970208044
$1/2^2$	790	$0.32475473710^{-4}$	-4.488444504
$1/2^3$	1580	$0.17326551310^{-6}$	-6.761287871
$1/2^4$	3160	$0.92103484210^{-9}$	-9.035723940
$1/2^5$	6330	$0.40580384510^{-11}$	-11.39168384
$1/2^6$	12670	$0.16417416410^{-13}$	-13.78469518

**Table 2:** Método **m2**.

¿Se puede deducir de los datos anteriores con qué orden están funcionando los métodos? ¿Cuál es el que tiene mejor comportamiento?

(2 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)