

E. de Ingenierías Industriales

2012-13

Métodos Matemáticos I

Jesús Rojo

02. Ecuaciones escalares: el método de EULER

- 1 Métodos numéricos: métodos de un paso
- 2 El método de EULER
- 3 El error: consistencia y orden
- 4 Error local y error global

Métodos numéricos: métodos de un paso

Consideremos lo que hemos llamado un problema tipo o problema usual, consistente en una ecuación diferencial de primer orden en la forma normal, que ahora será una ecuación escalar, y una condición inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \eta,$$

donde por lo tanto, la función f es

$$f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

y en su dominio

$$D : x \in [a, b], \quad y \in (-\infty, \infty),$$

es Lipschitziana respecto de la variable y , con constante de LIPSCHITZ L .

Ya sabemos que, en estas condiciones, en el intervalo $[a, b]$ existe una única solución $y(x)$ del problema, que es la solución que intentamos aproximar.

Un **método numérico** o, simplemente **método**, es una ecuación en diferencias que hace intervenir como incógnitas valores

$$y_n \sim y(x_n)$$

que se consideran aproximaciones de la solución $y(x)$ en puntos x_0, x_1, \dots, x_N dados como

$$x_n = a + n h, \quad n = 0, \dots, N,$$

con

$$N = \frac{b-a}{h} \quad \text{o} \quad h = \frac{b-a}{N},$$

donde h es lo que se denomina **paso** del método y que en primera instancia consideraremos fijo.

Si en la ecuación en diferencias intervienen y_n e y_{n+1} , diremos que el método es de **1 paso** o de **paso simple**.

Si en la misma intervienen $y_n, y_{n+1}, y_{n+2} \dots$, diremos que el método es de **paso múltiple**.

Dentro de los métodos de 1 paso, que son los que van a centrar nuestra atención, nos interesaremos por los que tienen la forma

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h)$$

que son básicamente aquellos en los que y_{n+1} se puede despejar en función de los restantes elementos de la ecuación. De estos métodos diremos que son **explícitos**, llamándose implícitos o no explícitos los restantes.

Supondremos, además, que las ecuaciones en diferencias son las mismas para cada valor de n . De esa manera, el método se describirá dando una cualquiera de las ecuaciones. Pasando a aquellos de los que vamos a ocuparnos, el conocimiento de la expresión

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h)$$

para n genérico nos describirá el método de que se trate. Lógicamente, un método como los anteriores no se puede resolver salvo que tengamos alguna manera de conocer el valor de y_0 , por ejemplo. Ahora bien, condiciones como la inicial

$$y(a) = \eta,$$

nos permiten añadir

$$y_0 = \eta$$

y arrancar el método en diferencias.

Digamos finalmente que un **algoritmo** es una secuencia de códigos de ordenador que permite implementar el método.

Notemos que un método puede ser implementado por diferentes algoritmos (lo que matemáticamente puede no tener importancia); cuando se consideran los errores de redondeo es cuando un algoritmo se puede mostrar superior a otro.

El método de EULER

Hay varias maneras 'intuitivas' de introducir este método. La más rápida puede ser presentar el método como proveniente de substituir el valor de $y'(x)$ por el cociente incremental

$$y'(x) \sim \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Entonces, de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ se obtiene la igualdad aproximada

$$f(x, y(x)) \sim \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

que lleva a

$$y(x+h) \sim y(x) + hf(x, y(x));$$

para x_n (y para $x_{n+1} = x_n + h$) esto significa

$$y(x_{n+1}) \sim y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)).$$

Pues bien, el **método de EULER** consiste en tomar y_n e y_{n+1} como los valores que verifiquen exactamente

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n),$$

que es la ecuación en diferencias que constituye el método. Es un método de un paso y tiene la forma ya citada

$$y_{n+1} = y_n + h \Phi(x_n, y_n, h)$$

cuando tomamos

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y).$$

Es claro que la ecuación del método de EULER se resuelve en cuanto se proporciona un valor para y_0 , por ejemplo. Es normal tomar

$$y_0 = y(x_0) = y(a) = \eta,$$

lo que completa el método con un arranque totalmente natural.

El error: consistencia y orden

El estudio del error debería analizar las diferencias

$$y(x_n) - y_n,$$

pero esto choca con el desconocimiento del valor de $y(x_n)$ necesario para la comparación, que sólo es posible cuando en algún ejemplo se conoce la solución exacta $y(x)$, pero que no es posible en la práctica (donde desconoceremos esta solución analítica) ni tampoco en el estudio general (en que el problema y su solución son genéricos).

Lo que vamos a poder analizar es el valor de la cantidad residual dada por la expresión

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)),$$

que será pequeño cuando h lo es, teniendo en cuenta que

$$y_{n+1} - y_n - hf(x_n, y_n) = 0.$$

Vamos a denotar por T_{n+1} o $T_{n+1}(h)$ esta cantidad, y la denominaremos **Error local de truncación**, nombre que abreviaremos con **LTE**, que no son sino las iniciales inglesas de este concepto (mantenemos estas iniciales porque son las que aparecen con más frecuencia). Así pues

$$T_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)),$$

donde $y(x)$ es la solución de nuestro problema tipo. Los resultados que vamos a obtener no se ven influidos por el hecho del n que figura en esta expresión, sino que se obtienen trabajando simplemente con

$$T(h) = y(x+h) - y(x) - hf(x, y(x)),$$

que es lo que haremos.

Una pequeña explicación sobre el calificativo 'local' que añadimos a la palabra error. Si suponemos que $y_n = y(x_n)$, o sea si nos fijamos la solución exacta del problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_n) = y_n$$

(que no es la solución, claro, con la condición $y(a) = \eta$) el error vale

$$\begin{aligned} T_{n+1}(h) &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h f(x_n, y(x_n)) \\ &= y(x_{n+1}) - y_n - h f(x_n, y_n) \\ &= y(x_{n+1}) - y_{n+1}, \end{aligned}$$

o sea, es el que aparece cuando nos limitamos a dar entonces el paso entre y_n e y_{n+1} , sin que ningún error provenga así de los pasos precedentes.

Un método va a ser 'utilizable' para aproximar la solución $y(x)$ de un problema tipo cuando el error local de truncación converja a 0 con mayor rapidez que el paso h lo hace. O sea, cuando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h} = 0.$$

¿Es de este tipo nuestro método de EULER? Para dicho método tenemos

$$\frac{T(h)}{h} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x, y(x)) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - y'(x),$$

y esto, evidentemente, tiende a 0 ya que, por la propia definición de $y'(x)$, esta derivada es el límite cuando $h \rightarrow 0$ del cociente incremental que aparece a la izquierda.

La propiedad precedente se denomina **consistencia** del método, y el método que la posee **método consistente**. Lo que hemos visto es que el método de EULER es consistente.

También diremos que el método de EULER es de orden 1 (o al menos 1) debido a la propiedad

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h^1} = 0,$$

así como diremos que un método es 'al menos de orden p ' cuando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h^p} = 0.$$

¿Será el método de EULER de algún orden más alto?. Para responder a ello conviene hacer algunos preparativos.

Comencemos desarrollando $T(h)$ en serie de TAYLOR de potencias de h .

$$T(h) = y(x+h) - y(x) - hf(x, y(x)),$$

y tanto $y(x) = h^0 y(x)$ como $hf(x, y(x)) = h^1 f(x, y(x))$ ya están listos. Queda hacer el desarrollo de $y(x+h)$, naturalmente de forma genérica ya que $y(x)$ no es ninguna función concreta.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \dots$$

en desarrollo infinito de TAYLOR. Como además $y'(x) = f(x, y(x))$, resulta que

$$T(h) = \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \dots,$$

Mejor aún, haciendo el desarrollo finito de TAYLOR con resto,

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\zeta),$$

lo que nos queda es que

$$T(h) = \frac{h^2}{2} y''(\zeta)$$

donde ζ es un punto (desconocido o no concreto) que existe y que hace cierto el desarrollo en la forma finita; de ζ sabemos únicamente que estará entre x y $x+h$, o sea en el intervalo $[x, x+h]$ si h es positivo.

Ahora podemos contestar a la pregunta antes planteada; tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h^2} = \frac{1}{2} y''(\zeta),$$

y esto no es generalmente nulo. Por lo tanto, el método de EULER es exactamente de orden 1.

Perfeccionaremos este lenguaje con la introducción de la notación

$$\mathcal{O}(h^p),$$

de uso tradicional para infinitésimos.

Si $g(h)$ es un infinitésimo dependiente de la variable h que interesa cuando $h \rightarrow 0$, se escribe

$$g(h) = \mathcal{O}(h^p)$$

para significar que

$$|g(h)| \leq M h^p$$

para alguna constante M y h suficientemente pequeño.

Se trata de una notación que suele llamarse **la O de LANDAU** iniciada por el físico ruso del mismo nombre.

Conviene comprobar algunos resultados sencillos que luego usaremos, como que

$$\mathcal{O}(h^p) \cdot \mathcal{O}(h^q) = \mathcal{O}(h^{p+q}), \quad \mathcal{O}(h^p) \pm \mathcal{O}(h^q) = \mathcal{O}(h^p)$$

con $p = \min(p, q)$, por ejemplo.

Si ahora recordamos que, para el método de EULER,

$$T(h) = \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \dots$$

o mejor

$$T(h) = \frac{h^2}{2} y''(\zeta),$$

tenemos que

$$T(h) = \mathcal{O}(h^2),$$

ya que

$$|T(h)| \leq \frac{M}{2} h^2,$$

tomando como M cualquier cota superior de la función y'' en el intervalo entre x y $x + h$.

Como anticipo de lo que luego veremos, digamos que todos los métodos consistentes van a tener un error local $T(h)$ cuyo desarrollo en potencias de h va a comenzar por el término en h^2 o posteriores, o, de forma equivalente, el cociente $T(h)/h$ va a comenzar su desarrollo por el término $h^1 = h$ (sin h^0) o posteriores. Cuando el desarrollo de $T(h)$ comience por el término h^{p+1} o, lo que es lo mismo, el de $T(h)/h$ comience por h^p , diremos que el método es de **orden p** . Esto equivale a decir que $T(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$ y también que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)}{h^{p+1}} \neq 0.$$

Por consiguiente, el método de EULER es, como ya habíamos dicho, de orden 1 exactamente (el menor posible entre los métodos consistentes)

El primer término del desarrollo en potencias de h de $T(h)$ se suele llamar **término principal de error**. El coeficiente numérico de este término es la **constante del error** del método.

Para nuestro método de EULER el término principal del error es, como hemos visto,

$$h^2 \frac{1}{2} y''(x).$$

y la constante del error es

$$\frac{1}{2}.$$

El término principal del error va a indicar, claro, el orden de un método. La constante del error va a permitir la comparación entre métodos que tengan el mismo orden.

Error local y error global

Regresemos a la noción de error local de truncación para el método de EULER

$$T_{n+1}(h) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)),$$

que se podía interpretar como el error cometido en el paso de y_n a y_{n+1} exclusivamente.

El **error global (GTE)** o **error global de truncación** será la diferencia

$$E_n = E_n(h) = y(x_n) - y_n$$

en el mismo instante que T_n pero sin suposición ninguna sobre los anteriores pasos. Es de hecho el error que finalmente interesa, pero no es directamente calculable por el desconocimiento habitual del valor de $y(x_n)$, que supondría un conocimiento de la solución exacta del problema.

Sin embargo, se puede dar una apreciación de la magnitud del error global a partir del conocimiento del error local. Para el método de EULER se puede ver que el conocido hecho

$$T_n(h) = \mathcal{O}(h^2)$$

tiene como consecuencia el que, para el error global,

$$E_n(h) = \mathcal{O}(h).$$

De nuevo, este hecho de la disminución en una unidad en la potencia de h al pasar del error local al global es generalizable a otros métodos. Es un hecho general que, para los métodos de orden p , para los que $T_n(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$ el error global tiene el comportamiento $E_n(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

No es difícil probar la afirmación que, para el método de EULER, acabamos de hacer. Aunque no lo razonamos aquí para no perder en exceso el hilo de los resultados.