

(Preprint for)

J. ÁLVAREZ Y J. ROJO

*Métodos GRK de tres etapas y orden cuatro  
para sistemas especiales de EDOs*

8 pp. in

J.M. JORNET, J.M. LÓPEZ, C. OLIVÉ, R. RAMÍREZ (eds.)

*XVIII CEDYA / VIII CMA*

*Tarragona, 15-19 Septiembre de 2003*

Univ. Rovira i Virgili, Tarragona, Spain, 2003

# Métodos GRK de tres etapas y orden cuatro para sistemas especiales de EDOs

Jorge Álvarez<sup>1</sup>

Jesús Rojo<sup>1</sup>

## Resumen

Recientemente hemos introducido en [1], [2], [3] y [5] unos nuevos métodos explícitos para EDOs escalares autónomas, que pueden ser considerados una generalización de los conocidos métodos Runge–Kutta explícitos y que permiten mejorar tanto el orden como las propiedades de estabilidad lineal de éstos. En [4] generalizamos los métodos de dos etapas para hacerlos aplicables a ciertos tipos de sistemas de EDOs y ahora pretendemos hacer lo mismo para las fórmulas de tres etapas. Veremos que se pueden obtener métodos de tres etapas y orden cuatro con buenas propiedades de estabilidad lineal tales como la L-estabilidad.

## Introducción

Hemos estudiado recientemente en [1], [2] y [3] nuevas fórmulas explícitas de dos etapas y orden tres para EDOs escalares autónomas, con buenas propiedades de estabilidad lineal. Los métodos pueden ser considerados una generalización de los conocidos métodos Runge–Kutta explícitos de dos etapas, pero permiten mejorar tanto el orden como las propiedades de estabilidad lineal de éstos. Concretamente, es bien conocido que un método explícito de Runge–Kutta de dos etapas permite obtener a lo sumo orden dos, en tanto que nosotros obtenemos una familia de métodos explícitos de dos etapas y orden tres. Además, conseguimos fórmulas con buenas propiedades de estabilidad lineal tales como la A-estabilidad y la L-estabilidad que, como es bien conocido, no se pueden obtener con la familia de métodos Runge–Kutta explícitos.

La forma general de los métodos que proponemos para EDOs escalares autónomas se puede encontrar en [5]. En dicho trabajo se muestra que es posible obtener métodos explícitos de tres etapas y orden cinco, en tanto que los métodos de Runge–Kutta explícitos de tres etapas sólo permiten obtener orden tres. También se ve que es posible de nuevo obtener propiedades como la A-estabilidad y L-estabilidad con nuestras fórmulas y ello sin renunciar al orden cinco con tres etapas.

En [7] mostramos una generalización de nuestras fórmulas al caso de EDOs de segundo orden de un tipo particular, obteniendo orden cuatro con dos etapas (con los métodos explícitos Runge–Kutta–Nyström de dos etapas sólo se obtiene orden tres) así como otras propiedades interesantes (tales como integrar exactamente osciladores).

Una generalización de nuestras fórmulas de dos etapas que permite aplicarlas a cierto tipo de sistemas de EDOs, conservando las buenas propiedades de estabilidad lineal y el orden tres, viene recogida en [4]. Las fórmulas que resultan de esta generalización son linealmente implícitas, pero no requieren del uso de la matriz Jacobiana en su implementación (a diferencia de lo que ocurre habitualmente en este tipo de métodos).

En la reciente tesis [6] recogemos éstos resultados relativos a los métodos GRK.

El presente trabajo estudia la generalización de las fórmulas de tres etapas del caso escalar autónomo al de sistemas de un tipo particular que denominaremos separados. Damos la formulación general de los nuevos métodos de  $p$  etapas para sistemas separados y vemos que es posible obtener fórmulas de orden cuatro con buenas propiedades de estabilidad lineal tales como la L-estabilidad. Realizamos varios experimentos numéricos para ilustrar el buen comportamiento de las fórmulas obtenidas.

## El problema

Consideraremos en lo que sigue sistemas autónomos de EDOs de la forma

$$\begin{aligned} y'_{(1)} &= f_{11}(y_{(1)}) + f_{12}(y_{(2)}) + \dots + f_{1m}(y_{(m)}), \\ &\vdots \\ y'_{(m)} &= f_{m1}(y_{(1)}) + f_{m2}(y_{(2)}) + \dots + f_{mm}(y_{(m)}), \end{aligned} \quad (1)$$

es decir, sistemas del tipo  $y' = f(y) = \sum_{j=1}^m F_j(y_{(j)})$  para los que la función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  viene dada por  $f(y) = F(y)\mathbb{1}$ , con  $y = (y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(m)})$ ,  $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$  y donde  $F$  es la matriz  $m \times m$  cuya  $j$ -ésima columna viene dada por

$$F_j(y_{(j)}) = \left( f_{1j}(y_{(j)}), f_{2j}(y_{(j)}), \dots, f_{mj}(y_{(j)}) \right)^T, \quad (2)$$

con componentes  $f_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nótese el uso que hacemos de los paréntesis en los subíndices para denotar las componentes de los vectores  $y$  e  $y'$ . Aunque la formulación (1-2) anterior no es unívoca en lo relativo a constantes aditivas, los métodos que introduciremos proporcionan los mismos resultados independientemente de donde se asimilen dichas constantes. Luego, en definitiva, tenemos el sistema  $y' = f(y)$  de dimensión  $m$  cuyas componentes vienen dadas por

$$y'_{(i)} = f_i(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(m)}) = \sum_{j=1}^m f_{ij}(y_{(j)}), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3)$$

En adelante llamaremos a este tipo de sistemas *separados*. La familia de sistemas "separados" es lo suficientemente amplia como para contener muchos problemas de interés. A modo de ejemplo, podemos adelantar que sistemas de este tipo surgen al discretizar algunas EDPs de tipo parabólico mediante el Método de líneas (MOL) con diferencias finitas. Más adelante ilustraremos esto aplicando un método GRK a un sistema separado que surge al aplicar el método de líneas a la ecuación de Burgers.

Nótese asimismo que los sistemas no autónomos de la forma  $y'(x) = f(y(x)) + g(x)$  también se pueden reescribir como un sistema autónomo de una dimensión más con sólo añadir la ecuación  $x' = 1$ . Si  $f$  es de la forma descrita anteriormente, entonces el sistema autónomo resultante también lo es, y todo lo que veremos en adelante será perfectamente aplicable. Además, aunque el sistema resultante es de dimensión  $m + 1$ , los métodos pueden ser de hecho implementados sin incrementar dicha dimensión.

## Descripción de los métodos de $p$ etapas para sistemas

Describiremos ahora los métodos GRK aplicables a sistemas del tipo (1). Lo haremos utilizando la reformulación de los métodos de  $p$  etapas vista en el caso escalar (véase [5]), si bien la modificaremos ligeramente para hacerla aplicable a la nueva situación.

Para el problema (1) con condición inicial  $y(x_0) = y_0$  ( $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ) consideramos la familia de métodos de  $p$  etapas definida por

$$y_{n+1} = y_n + hG_{p+1}(S_2, S_3, \dots, S_p) k_1, \quad (4)$$

con las etapas dadas por

$$k_1 = f(y_n), \quad k_2 = f(y_n + hG_2 k_1), \quad \dots, \quad k_p = f(y_n + hG_p(S_2, S_3, \dots, S_{p-1}) k_1), \quad (5)$$

donde ahora  $y_n, y_{n+1}$  y  $k_1$  son vectores de  $\mathbb{R}^m$  y tanto los  $S_i$  como los  $G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1})$  son matrices cuadradas, esto es,  $S_i \in M_{\mathbb{R}}(m)$  y  $G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) \in M_{\mathbb{R}}(m)$  (con  $M_{\mathbb{R}}(m)$  denotamos el espacio de matrices cuadradas  $m \times m$  con coeficientes reales). Las  $S_i$  (con  $2 \leq i \leq p$ ) son matrices cuadradas  $m \times m$  cuya  $j$ -ésima columna es

$$\frac{F_j(y_{n(j)}) + h e_j G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1 - F_j(y_{n(j)})}{e_j G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1}, \quad (6)$$

donde con  $e_j$  denotamos el vector fila de  $\mathbb{R}^m$  con todas sus componentes nulas a excepción de la  $j$ -ésima que vale 1. Nótese que el elemento que ocupa la fila  $p$  y columna  $q$  (con  $1 \leq p, q \leq m$ ) en la matriz  $S_i$  viene dado por

$$\frac{f_{pq}(y_{n(q)}) + h e_q G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1 - f_{pq}(y_{n(q)})}{e_q G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1}. \quad (7)$$

Las etapas  $k_i$  vienen dadas en términos de la función  $F$  de (2) a través de

$$k_i = F(y_n + h G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1) \mathbb{1}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad (8)$$

donde  $F(y_n + h G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1)$  es la matriz cuadrada  $m \times m$  cuyo elemento en la fila  $p$  y columna  $q$  (con  $1 \leq p, q \leq m$ ) es

$$f_{pq}(y_{n(q)}) + h e_q G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1. \quad (9)$$

De los comentarios anteriores se deduce que las matrices  $S_i$  generalizan los términos  $s_i$  vistos en el caso escalar, si bien ligeramente modificados. Es fácil comprobar que los métodos para el problema escalar podrían haber sido formulados también así.

Las matrices  $S_i$  para este tipo de sistemas nos proporcionan aproximaciones a  $h f_y(y_n)$ , esto es, a la matriz Jacobiana asociada a la función  $f$  en el punto  $y_n$  (multiplicada por el paso  $h$ ). Para verlo, basta observar que (7) puede ser considerado una aproximación a la derivada parcial de la componente  $p$ -ésima de  $f$  respecto de la variable  $q$ -ésima en el punto  $y_n$ . Esto es así para este tipo de sistemas por verificarse

$$\frac{\partial f_p}{\partial y_{(q)}}(y_n) = \frac{\partial f_{pq}}{\partial y_{(q)}}(y_{n(q)}) \approx \frac{f_{pq}(y_{n(q)}) + h \delta_q - f_{pq}(y_{n(q)})}{h \delta_q}, \quad (10)$$

donde en nuestro caso es  $\delta_q = e_q G_i(S_2, S_3, \dots, S_{i-1}) k_1$ .

Podemos concluir que los métodos GRK que acabamos de describir para sistemas separados se parecen a los métodos de tipo Rosenbrock y especialmente a sus variantes tales como los W-métodos [10], los MROW-métodos [12] y los métodos de Runge-Kutta generalizados [11] para los cuales no es necesario calcular la matriz Jacobiana de forma exacta a la hora de implementarlos. En [8] se describen algunos de dichos métodos.

La principal novedad que introducen nuestros métodos respecto de los citados anteriormente radica en que, para las fórmulas que hemos dado, las aproximaciones a la matriz Jacobiana se obtienen sin nuevas evaluaciones de la función  $f$ , pues las matrices  $S_i$  se construyen a partir de la información contenida en las propias etapas (aunque esto obliga a trabajar con matrices en algunas fases de la evaluación).

## Propiedades de estabilidad lineal

El estudio de las propiedades de estabilidad lineal es más complicado que en el caso escalar autónomo. Para sistemas separados hemos de considerar en vez de la ecuación test  $y' = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , el sistema test  $y' = Ay$  donde  $A$  es una matriz cuadrada  $m \times m$  con  $m$  autovalores distintos  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) cuyas partes reales son negativas. Las condiciones anteriores permiten asegurar que las soluciones (exactas) del sistema considerado tienden a cero cuando  $x$  tiende a infinito y que existe una matriz no singular  $Q$  tal que se verifica  $Q^{-1}AQ = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ . La transformación  $y = Qz$  permite simplificar el estudio de la estabilidad lineal de los métodos, que se reduce a considerar la ecuación escalar test que hemos mencionado anteriormente, pues tanto el sistema test como las fórmulas en diferencias que definen los métodos quedan desacopladas tras aplicar la transformación (véase [6] pp. 100–102 para más detalles). Por esta razón, en lo que sigue bastará considerar la ecuación escalar test dada por  $y' = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $\Re(\lambda) < 0$ , a la hora de realizar el estudio de las propiedades de estabilidad lineal de los métodos aplicables a sistemas separados.

Al aplicar un método de  $p$  etapas para sistemas definido por (4–6) a la función escalar test obtenemos

$$y_{n+1} = R(z)y_n, \quad (11)$$

donde  $R(z)$  es la función de estabilidad lineal asociada con  $z = h\lambda$ . A partir de (4–6) se obtienen recursivamente

$$k_1 = \lambda y_n, \quad S_2 = z, \quad S_3 = z, \quad \dots, \quad S_p = z, \quad (12)$$

y por tanto, la función de estabilidad lineal toma la forma

$$R(z) = 1 + zG_{p+1}(z, z, \dots, z). \quad (13)$$

## Métodos de tres etapas y orden cuatro

En [4] hemos descrito la forma general que adoptan nuestros métodos de dos etapas y orden tres para sistemas separados. En dicho trabajo también describimos un primer método L-estable de dos etapas y orden tres que es linealmente implícito pero que no requiere del uso de la matriz Jacobiana en su implementación (a diferencia de lo que ocurre habitualmente en este tipo de métodos).

Nos proponemos ahora hacer lo mismo para las fórmulas de tres etapas. Ahora la situación cambia respecto del caso de dos etapas, pues la posible no conmutatividad de los productos de las matrices  $S_2$  y  $S_3$  que intervienen habrá de ser tenida en cuenta.

Empecemos considerando la expresión general de los métodos GRK de tres etapas (para sistemas del tipo descrito en (1)) que se deduce de (4) particularizando para  $p = 3$ . Como ya comentamos en el caso escalar (véase [5]), sólo algunos de los infinitos parámetros libres de los que disponemos en principio al considerar funciones  $G_i$  generales, aparecen en las condiciones de orden (pues las matrices  $S_2$  y  $S_3$  son  $O(h)$ ), pero aún así, las condiciones de orden resultantes son relativamente complicadas. Por ello definimos una nueva matriz  $\tilde{S}_3$  que sustituye a la matriz  $S_3$  y simplifica el estudio, que aquí omitimos por razones de brevedad, pero que puede ser consultado en [6]. Tomaremos  $\tilde{S}_3 = S_3 - S_2$  con lo cual se verificará que  $\tilde{S}_3 = O(h^2)$  y de este modo el número de parámetros involucrados en las condiciones de orden será inferior, simplificando éstas.

Con la introducción de  $\tilde{S}_3$  los métodos de tres etapas de tipo polinomial pueden ser ahora descritos así

$$y_{n+1} = y_n + h\tilde{G}_4(S_2, \tilde{S}_3) k_1, \quad (14)$$

con las etapas dadas por

$$k_1 = f(y_n), \quad k_2 = f(y_n + hG_2 k_1), \quad k_3 = f(y_n + hG_3(S_2) k_1), \quad (15)$$

(con  $G_2 = c_2 I$ ) en términos de las matrices cuadradas  $S_2$  y  $S_3$  cuya  $j$ -ésima columna se obtienen tomando en (6)  $i = 2$  e  $i = 3$  respectivamente, y donde  $\tilde{S}_3 = S_3 - S_2$ . Nótese que el elemento que ocupa la fila  $p$  y columna  $q$  (con  $1 \leq p, q \leq m$ ) en las matrices  $S_2$  y  $S_3$  viene dado respectivamente por

$$\frac{f_{pq}(y_{n(q)} + h e_q G_2 k_1) - f_{pq}(y_{n(q)})}{e_q G_2 k_1}, \quad \frac{f_{pq}(y_{n(q)} + h e_q G_3(S_2) k_1) - f_{pq}(y_{n(q)})}{e_q G_3(S_2) k_1}. \quad (16)$$

Seguidamente estudiaremos los métodos de tres etapas obtenidos al considerar funciones  $G_i$  ( $G_3$  y  $\tilde{G}_4$  en realidad) de tipo racional (hacemos esto para obtener fórmulas con buenas propiedades de estabilidad lineal a partir de la función de estabilidad lineal asociada que es a su vez racional). Un método de tres etapas para sistemas, definido en términos de funciones racionales, viene dado por  $G_2 = c_2 I$  (con  $c_2$  constante) y en términos de las funciones  $G_3$  y  $\tilde{G}_4$  que toman la forma

$$G_3(S_2) = c_3 \left( I + \sum_{i=1}^{d_3^*} d_{3,22\dots 2} S_2^i \right)^{-1} \left( I + \sum_{i=1}^{n_3^*} n_{3,22\dots 2} S_2^i \right), \quad (17)$$

$$\tilde{G}_4(S_2, \tilde{S}_3) = c_4 \left( I + \sum_{i=1}^{d_4^*} d_{4,\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i} S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \dots S_{\sigma_i} \right)^{-1} \left( I + \sum_{i=1}^{n_4^*} n_{4,\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i} S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \dots S_{\sigma_i} \right).$$

Cada uno de los subíndices  $\sigma_k$  que aparecen en los sumatorios de (17) que definen  $\tilde{G}_4$ , pueden tomar los valores 2 ó 3 y pondremos  $S_{\sigma_k} = S_2$  cuando  $\sigma_k = 2$  y  $S_{\sigma_k} = \tilde{S}_3$  cuando sea  $\sigma_k = 3$ . Nos hemos visto obligados a introducir estos subíndices  $\sigma_k$ , por la posible no conmutatividad de los productos de las matrices  $S_2$  y  $\tilde{S}_3$ , que obliga a distinguir los coeficientes de los productos de dichas matrices cuando, pese a estar formados por los mismos factores, éstos aparecen multiplicados en diferente orden. Además, en los sumatorios de (17) que definen la función  $\tilde{G}_4$ , consideraremos únicamente aquellos sumandos para los cuales se verifique que  $n_2 + 2n_3$  sea menor o igual que  $d_4^*$  (en el primer sumatorio) o  $n_4^*$  (en el segundo), donde con  $n_2$  denotamos el número de subíndices  $\sigma_k$  del coeficiente correspondiente que toman el valor 2, y con  $n_3$  el número de  $\sigma_k$  que toman el valor 3.

## Un ejemplo de método L-estable de tres etapas y orden cuatro

En [4] vimos un primer ejemplo de método L-estable de dos etapas y orden tres para sistemas separados, así como varios experimentos numéricos para ilustrar el buen comportamiento de dicha fórmula al ser aplicada a diversos problemas rígidos.

A continuación pasamos a ver un primer ejemplo de método L-estable de tres etapas y orden cuatro para sistemas del tipo considerado. Análogamente a como ocurre al estudiar fórmulas diagonalmente implícitas de tipo Runge-Kutta (SDIRK), hemos de elegir una función de estabilidad lineal de tipo racional con un único polo real (de este

modo bastará realizar una única factorización LU por cada paso de integración). Se puede comprobar que para que el método sea de orden cuatro y L-estable, es necesario que la función de estabilidad lineal tenga el único polo (real) de multiplicidad al menos cuatro. Además, existe un único valor (del polo) que permite obtener las propiedades anteriores con multiplicidad exactamente cuatro, y viene dado por la raíz del polinomio

$$24x^4 - 96x^3 + 72x^2 - 16x + 1, \quad (18)$$

que toma aproximadamente el valor  $a \approx 0,57281606$  (véase [8], pp. 96–98 para más detalles). La correspondiente función de estabilidad lineal es una función racional  $R(z)$  cuyo numerador es de grado tres y cuyo denominador es de grado cuatro, y que viene dada en términos del valor  $a$  al que hemos hecho referencia anteriormente por

$$R(z) = \frac{6+6(1-4a)z+3(1-8a+12a^2)z^2+(1-12a+36a^2-24a^3)z^3}{6(1-a)^4}. \quad (19)$$

Un método, verificando lo anterior, se obtiene tomando

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{6 - \sqrt{6}}{10}, & c_3 &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10}, & c_4 &= 1, & d_{3,2} &= -a, & d_{4,2} &= -4a, & d_{4,3} &= 0, \\ d_{4,22} &= 6a^2, & d_{4,23} &= 0, & d_{4,32} &= 0, & d_{4,222} &= -4a^3, & d_{4,2222} &= a^4, & & \\ n_{3,2} &= \frac{(6 - 5a) - \sqrt{6}}{5}, & n_{4,2} &= \frac{1 - 8a}{2}, & n_{4,3} &= \frac{9 + \sqrt{6}}{36}, & n_{4,22} &= \frac{36a^2 - 12a + 1}{6}, & & & \\ n_{4,23} &= \frac{6(1 - 12a) - (1 + 8a)\sqrt{6}}{72}, & n_{4,32} &= 0, & n_{4,222} &= \frac{-96a^3 + 72a^2 - 16a + 1}{24}. & & & & & \end{aligned} \quad (20)$$

en términos del valor  $a$  que mencionamos anteriormente, y el resto de parámetros nulos.

Conviene comentar en este punto que la fórmula L-estable de tres etapas y orden cuatro que acabamos de construir (y otras que podríamos haber construido análogamente) mejora, en lo que respecta al número de evaluaciones de la función  $f$  que se requieren en cada paso de la integración, los resultados que se obtienen con las fórmulas diagonalmente implícitas de tipo Runge-Kutta (SDIRK). En [8], pp. 98, se muestra que son necesarias al menos cuatro etapas si se desea obtener una fórmula SDIRK de orden cuatro y L-estable.

A continuación ilustraremos mediante varios experimentos numéricos el comportamiento de la fórmula que acabamos de describir.

## Experimentos numéricos con problemas rígidos

Al aplicar nuestro método al sistema de EDOs asociado a la ecuación de Burgers (obtenido por el método de líneas) que describimos en [4], tomando los valores  $N = 24$  y  $\nu = 0,2$  e integrando con paso fijo  $h = 0,04$ , se obtiene una representación gráfica de la solución numérica indistinguible de la recogida en la figura 1 de dicho artículo.

En nuestra figura 1 se muestra en doble escala logarítmica el error  $E$  (en la norma euclídea en  $\mathbb{R}^{24}$ ) en el punto  $t = 1$  que se produce al integrar con paso fijo  $h = 2^{-k}$  para los valores  $k = 2, 3, \dots, 10$  el problema anterior. Al comparar dicha gráfica con la figura 2 que obteníamos en [4] se observa que para tamaños del paso  $h$  grandes se comporta ligeramente mejor el método de orden tres, pero al ir reduciendo el tamaño del paso  $h$  acaba siendo bastante más preciso el de orden cuatro (como cabía esperar).

En la figura 2 representamos en doble escala logarítmica el error  $E$  en la norma  $L_2$  que se comete al integrar a lo largo de  $10 \cdot 2^k$  pasos la familia de problemas tomada de [9], pp. 34 y dada por

$$\begin{aligned} y_1' &= -(b + an)y_1 + by_2^n & y_1(0) &= c^n \\ y_2' &= y_1 - ay_2 - y_2^n & y_2(0) &= c \end{aligned} \quad (21)$$

cuya solución viene dada por

$$y_1(x) = c^n e^{-anx}, \quad y_2(x) = ce^{-ax}. \quad (22)$$

utilizando los tamaños de paso  $h = 2^{-k}$  (con  $k = 0, 1, \dots, 10$ ). Hemos tomado los valores  $a = 0, 1$ ,  $c = 1$ ,  $n = 4$  y  $b = 100^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) en el intervalo  $0 \leq x \leq 10$ .

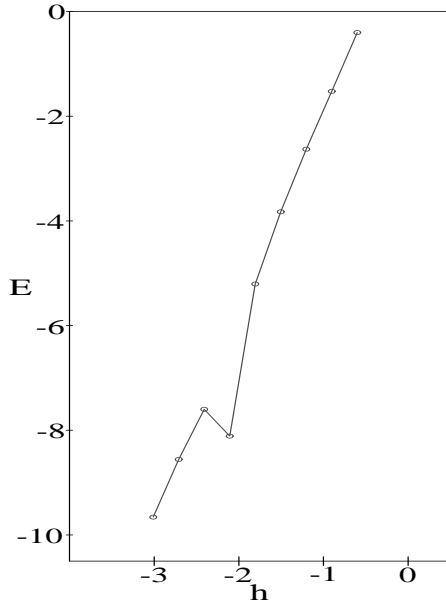


Figura 1: Error  $E$  como función del paso  $h$  en doble escala logarítmica.

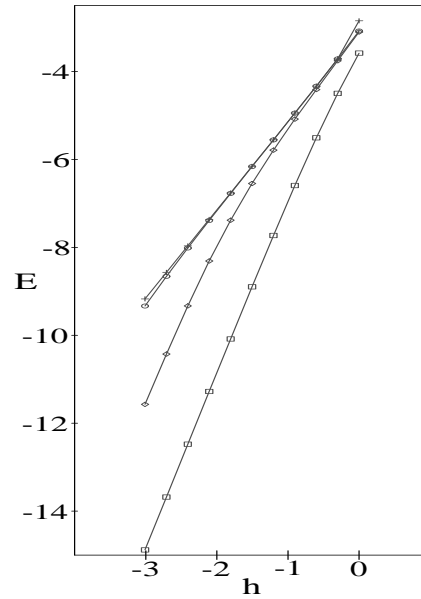


Figura 2: Error  $E$  como función del paso  $h$  en doble escala logarítmica.

Cuanto mayor es la constante  $b$  más rígido es el sistema (de hecho los autovalores a lo largo de la solución exacta verifican que  $\lambda_1 \approx -b$  and  $\lambda_2 \approx -a$ ) y cuanto mayor es  $n$  mayor es el carácter no lineal del problema (véase [9] para más detalles). Para los valores  $b = 1000000$  (cruces en la figura) y  $b = 10000$  (círculos), y para el rango de tamaños de paso considerados, se observa un orden de convergencia próximo a dos (claramente inferior al que cabría esperar). Al tomar  $b = 100$  (diamantes) podemos ver en la figura que el orden se incrementa de dos a cuatro cuando reducimos el tamaño del paso considerado. El fenómeno de la reducción en el orden de convergencia está relacionado con el concepto de B-convergencia y muchos métodos implícitos muestran este comportamiento cuando son aplicados a algunas ecuaciones diferenciales rígidas (no lineales). Finalmente, para el valor  $b = 1$  (cuadrados) el problema no es rígido y nuestro método muestra orden cuatro (como era de esperar) y proporciona una aproximación muy precisa a la solución exacta.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Programa General de Apoyo a Proyectos de Investigación de la Junta de Castilla y León bajo el proyecto VA024/03 y por el Programa C.I.C.Y.T bajo el proyecto BFM2002-03815.



## Referencias

- [1] J. Álvarez and J. Rojo, “New A-stable explicit two-stage methods of order three for the scalar autonomous IVP”, in: P. de Oliveira et al. eds., *Proc. of the 2nd. Meeting NMDE’98*, (1998), 57–66.
- [2] J. Álvarez and J. Rojo, “A New Family of Explicit Two-Stage Methods of order Three for the Scalar Autonomous IVP”, *Intl. J. of Appl. Sc. & Comput.*, **5**, (1999), 246–251.
- [3] J. Álvarez, “Obtaining New Explicit Two-Stage Methods for the Scalar Autonomous IVP with Prefixed Stability Functions”, *Intl. J. of Appl. Sc. & Comput.*, **6**, (1999), 39-44.
- [4] J. Álvarez and J. Rojo, “Special methods for the numerical integration of some ODE’s systems”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **47**, 8, (2001), 5703–5708.
- [5] J. Álvarez and J. Rojo, “An improved class of generalized Runge-Kutta methods for stiff problems, Part I: The scalar case”, *Appl. Math. and Comput.*, **130**, 2-3, (2002), 537–560.
- [6] J. Álvarez, *Métodos GRK para ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad de Valladolid, Spain, Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería, Tesis - Ph.D. Thesis, 2002, 149 pp.
- [7] J. Álvarez and J. Rojo, “An improved class of generalized Runge-Kutta-Nyström methods for special second order differential equations”, *Proc. of the Intl. Conference CMMSE 2002*, **I**, (2002), 11-20.
- [8] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [9] P. Kaps, S. W. H. Poon and T. D. Bui, “Rosenbrock Methods for Stiff ODEs: A Comparison of Richardson Extrapolation and Embedding Technique”, *Computing*, **34**, (1985), 17–40.
- [10] T. Steihaug and A. Wolfbrandt, “An Attempt to Avoid Exact Jacobian and Non-linear Equations in the Numerical Solution of Stiff Differential Equations”, *Math. Comp.*, **33**, (1979), 521–534.
- [11] J. G. Verwer, “S-Stability Properties for Generalized Runge-Kutta Methods”, *Numer. Math.*, **27**, (1977), 359–370.
- [12] H. Zedan, “Avoiding the exactness of the Jacobian matrix in Rosenbrock formulae”, *Comput. Math. Appl.*, **19**, (1990), 83–89.