E.T.S. de Ingenieros Industriales **2009-10**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(03/07/2010)**

1 Para un problema escalar se diseñan dos métodos numéricos de integración de ecuaciones diferenciales que designaremos con los nombres de **M1** y **M2**. Para determinar cuál es el más apto, se realiza la integración de un problema test entre 0 y 1 . El primer método es de paso fijo. Se ensaya con los pasos

$$\frac{1}{2^4} = 0.0625\,, \frac{1}{2^5} = 0.0313\,, \frac{1}{2^6} = 0.0156\,, \frac{1}{2^7} = 0.0078\,, \frac{1}{2^8} = 0.0039\,,$$

siendo el número de pasos para el **M1**

$$16, 32, 64, 128, 256$$

y el número de evaluaciones

$$32, 64, 128, 256, 512\,,$$

en cada caso. El método **M2** es un par encajado. Se prueba con tolerancias

$$0.001\,, 0.0005\,, 0.0001\,, 0.00005\,, 0.00001\,,$$

y para ellas se han necesitado en el cálculo los siguientes números de evaluaciones

$$48, 96, 192, 384, 768\,.$$

Para cada método se calcula el log_{10} del error cometido en la aproximación de la solución en $x = 1$, error medido en norma 2. Los logaritmos de los errores que se obtienen son, para el **M1**

$$-3.929\,, -4.640\,, -5.271\,, -6.014\,, -6.642\,,$$

y para el **M2**

$$-3.168\,, -4.722\,, -6.862\,, -7.801\,, -8.639\,.$$

Con estos datos, se debe construir la 'gráfica de eficiencia' que mezcla los resultados de **M1** y **M2** exhibiendo 'número de evaluaciones versus log_{10} del error'. Además se dirá qué método es más interesante en la zona de integración empleada.
¿Se puede deducir de los datos anteriores con qué orden están funcionando los métodos? ; de ser así, ¿cuál es el que tiene mejor comportamiento?

(2 puntos)

E.T.S. de Ingenieros Industriales **2009-10**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(03/07/2010)**

2 Considérese la familia de métodos implícitos de RUNGE-KUTTA con dos etapas

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ C & A_1 & A_2 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

a) Búsquese el mayor orden alcanzable por los miembros de esta familia, indicando los valores de C , A_1 y A_2 para los que se consigue.
b) Calcúlese la función de estabilidad (en la forma 'útil', claro) para la familia propuesta de métodos.
c) Búsquese un ejemplo (razonado) de método A-estable.
d) Para los valores $A_1 = 2/3$ y $A_2 = 2$, compruébese si los métodos son o no A-estables.

(3 puntos)

3 Para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad x \in [0, l], \quad t \geq 0\,,$$

$$u(x, 0) = f(x)\,,$$

$$u(0, t) = 0\,, \quad u(l, t) = 0\,,$$

se considera el retículo habitual

$$x_n = n\,h\,, \quad h = \frac{l}{N}\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N\,,$$

$$t_m = m\,k\,, \quad k > 0\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

y las aproximaciones

$$u_{n\,m} \simeq u(x_n\,, t_m)\,,$$

a buscar mediante un método numérico.

Se trata justamente de buscar un método que proporcione un error de truncación $O(h^2) + O(k^2)$, y explicar las dificultades que aparecen en la puesta en práctica del método.

(3 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)