E.T.S. de Ingenieros Industriales **2008-09**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(15/07/2009)**

1 Se desea construir un par encajado **RK2(3)**. Se quiere que el método de orden 3 que se utiliza sea el dado por el tablero

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
\frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{-3+\sqrt{5}}{4} & 1 & \\
\hline
\text{(ord3)} & \frac{-1+\sqrt{5}}{6} & \frac{5-\sqrt{5}}{6} & \frac{1}{3}
\end{array}$$

Búsquese el correspondiente método de orden 2 que complemente al método indicado entre los de dos o tres evaluaciones de la forma

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
\frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{-3+\sqrt{5}}{4} & 1 & \\
\hline
\text{(ord2)} & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}$$

escribiendo el resultado en la forma del cuadro habitual para los pares encajados.

(3 puntos)

2 Considérese la familia de métodos implícitos de Runge-Kutta con dos etapas

$$\begin{array}{c|cc}
0 & \alpha & -\alpha \\
2 & \alpha & 2-\alpha \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}$$

a) Bùsquese el mayor orden alcanzable por los miembros de esta familia, indicando los valores de α para los que se consigue.
b) Calcúlese la función de estabilidad del método en el caso general.
c) Búsquese un valor de α para el que el correspondiente método sea A-estable, probando, además, dicha A-estabilidad.

(3 puntos)

E.T.S. de Ingenieros Industriales **2008-09**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(15/07/2009)**

3 Para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,, \qquad x \in [0,1], \quad t \geq 0 \,,$$

con condiciones

$$u(x,0) = f(x) \,, \qquad x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = 0 \,, u(1,t) = 0 \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

se considera el retículo habitual

$$\begin{array}{l} h = \dfrac{1}{N} \,, \quad x_n = h\,n \,, \quad x_0 < x_1 < \cdots < x_N \,, \\ k > 0 \,, \quad t_m = k\,m \,, \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots \,. \end{array}$$

y el método en diferencias, llamado método de Douglas,

$$(1 - 6\,\lambda)\, u_{n-1\,m+1} + (10 + 12\,\lambda)\, u_{n\,m+1} + (1 - 6\,\lambda)\, u_{n+1\,m+1} =$$

$$= (1 + 6\,\lambda)\, u_{n-1\,m} + (10 - 12\,\lambda)\, u_{n\,m} + (1 + 6\,\lambda)\, u_{n+1\,m} \,,$$

con $\lambda = k/h^2$.
a) Descríbase la forma matricial del método en términos de la habitual matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} ,$$

cuyos autovalores son

$$\rho_n = 4\,\mathrm{sen}^2 \left(\frac{n\,\pi}{2\,N} \right) \,, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \,,$$

para los autovectores

$$x^{(n)} = \left(\mathrm{sen}\, \frac{n\,\pi}{N} \,, \mathrm{sen}\, \frac{2\,n\,\pi}{N} \,, \ldots \,, \mathrm{sen}\, \frac{(N-1)\,n\,\pi}{N} \right) \,, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \,.$$

b) Calcúlense los autovalores que aparecen en el estudio, por el procedimiento matricial, de la estabilidad de este método.
c) Pruébese usando dicho procedimiento matricial que el método de Douglas es incondicionalmente estable.

(2 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)