

1 Para los métodos de RUNGE-KUTTA implícitos del siguiente tablero

1	1		
1/2	-1/2	1	
0	<b>a</b>	-3	1
	1/6	2/3	1/6

y, teniendo en cuenta que para tales métodos de 3 etapas se puede obtener hasta orden 6, dígame cuál es el orden máximo que se obtiene realmente y cuáles son los valores del parámetro **a** para los que se alcanza dicho orden.

(3 puntos)

2 Para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 \text{ y } u(1, t) = 0,$$

con condiciones de contorno homogéneas, se pretende poner en práctica el método en diferencias

$$\frac{u_{nm+1} - u_{nm-1}}{2k} = \alpha^2 \frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2}$$

cuya principal dificultad consiste evidentemente en el arranque del procedimiento. La pregunta que se plantea es la de la estabilidad del método. Se estudiará la estabilidad o inestabilidad con ayuda del método de FOURIER.

(3 puntos)

**3** Para un problema escalar se diseñan tres métodos numéricos de integración de ecuaciones diferenciales que designaremos con los nombres de **M1**, **M2** y **M3**. Para determinar cuál es el de orden más alto, se realiza la integración de un problema test entre 0 y 1. Los dos primeros métodos son de paso fijo. Para ellos se emplean los pasos

$$\frac{1}{2^4} = 0.0625, \frac{1}{2^5} = 0.0313, \frac{1}{2^6} = 0.0156, \frac{1}{2^7} = 0.0078, \frac{1}{2^8} = 0.0039.$$

Los números de pasos son, en todos los casos,

$$16, 32, 64, 128, 256.$$

Los números de evaluaciones son para el **M1**

$$32, 64, 128, 256, 512,$$

y para el **M2**

$$48, 96, 192, 384, 768.$$

El método **M3** es un par encajado. Se prueba con tolerancias

$$0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005,$$

y para ellas se han necesitado en el cálculo los siguientes números de evaluaciones

$$128, 220, 336, 448.$$

Para cada método se calcula el  $\log_{10}$  del error cometido en la aproximación de la solución en  $x = 1$ , error medido en norma 2. Los logaritmos de los errores que se obtienen son, para el **M1**

$$-3.849, -4.701, -5.381, -6.014, -6.630,$$

para el **M2**

$$-3.278, -4.861, -6.814, -7.743, -8.659,$$

y para el **M3**

$$-7.561, -8.014, -8.643, -8.959.$$

Con estos datos, se debe construir la 'gráfica de eficiencia' que mezcla los resultados de **M1**, **M2** y **M3** exhibiendo 'número de evaluaciones versus  $\log_{10}$  del error'. Además se dirá qué método es más interesante en cuanto al orden efectivo que se obtiene.

(2 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)