E.T.S. de Ingenieros Industriales **2002-03**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN EXTRAORDINARIO **(09/07/2003)**

1 Considérese la familia de métodos de RUNGE-KUTTA de 3 etapas y explícitos dados por el siguiente tablero

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/2 & \alpha & & \\
1 & \beta & 2 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/3 & 1/6
\end{array}
$$

a) ¿Para qué valores de los parámetros α y β los métodos son de orden 2?
b) ¿Existe alguna elección de α y β que proporcione un método de orden 3 ?
c) Para la familia de métodos propuesta, calcúlese la función de estabilidad en términos de α y β.
d) Calcúlese ahora la función de estabilidad para los valores para los que se obtiene el orden 2 . Si en este caso hacemos $\beta = 1$ o $\alpha = 0$, que es lo mismo, dibújese la correspondiente región de estabilidad.

(3 puntos)

2 Para comparar dos métodos de tipo RUNGE-KUTTA, que denotaremos por $m1$ y $m2$, el primero de paso fijo y el segundo de paso variable, se integra un problema test y se comparan los resultados numéricos obtenidos con los dos métodos. Para el primero, $m1$, se emplean los pasos

$$\frac{1}{2} = 0.5\,, \frac{1}{2^2} = 0.25\,, \frac{1}{2^3} = 0.125\,, \frac{1}{2^4} = 0.0625\,, \frac{1}{2^5} = 0.0313\,, \frac{1}{2^6} = 0.0156\,,$$

lo que significa que los números de evaluaciones de función son

$$390\,, 790\,, 1580\,, 3160\,, 6330\,, 12670\,,$$

y se obtienen los errores

$$0.107100612\,\cdot 10^{-1}\,, 0.324754737\,\cdot 10^{-2}\,, 0.173265513\,\cdot 10^{-3}\,,$$

$$0.921034842\,\cdot 10^{-4}\,, 0.405803845\,\cdot 10^{-5}\,, 0.164174164\,\cdot 10^{-6}\,.$$

Para $m2$ se emplean las tolerancias

$$10^{-3}\,,10^{-4}\,,10^{-5}\,,10^{-6}\,,10^{-7}\,,10^{-8}\,,10^{-9}\,,10^{-10}\,,10^{-11}\,;$$

para ellas los números de evaluaciones de función son

$$180\,,308\,,524\,,816\,,1332\,,2264\,,3896\,,6824\,,11932$$

y se obtienen los errores

$$0.120075671\ \cdot 10^{-1}\,,0.224069086\ \cdot 10^{-2}\,,0.293453270\ \cdot 10^{-3}\,,$$

$$0.325178066\ \cdot 10^{-4}\,,0.397930221\ \cdot 10^{-5}\,,0.436613469\ \cdot 10^{-6}\,,$$

$$0.445225052\ \cdot 10^{-7}\,,0.455563685\ \cdot 10^{-8}\,,0.473519591\ \cdot 10^{-9}\,.$$

¿Se puede deducir de los datos anteriores con qué orden están funcionando los métodos? ¿Cuál es el que tiene mejor comportamiento?

(2 puntos)

3 Para un problema parabólico, consideramos los métodos 'hacia adelante' y 'hacia atrás'. Escribimos el segundo para $m+1$ en lugar de m y obtenemos entonces un método numérico tomando la media aritmética de ambos, pero con coeficientes $1/4$ y $3/4$. El método resulta ser

$$\frac{u_{n\,m+1}-u_{n\,m}}{k}=\frac{\alpha^2}{4\,h^2}(u_{n+1\,m}-2u_{n\,m}+u_{n-1\,m}+3u_{n+1\,m+1}-6u_{n\,m+1}+3u_{n-1\,m+1})\,,$$

donde hemos usado las notaciones habituales. Póngase

$$\lambda=\frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

y constrúyase matricialmente dicho método, comprobando que es estable con independencia de las relaciones entre h y k, incrementos en x y en t.

(3 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)