

1 Considérese la familia de métodos de RUNGE-KUTTA de 3 etapas y explícitos dados por el tablero

0		
3/2	β	
0	1	-1
	1/3	α 1/3

- a) ¿Para qué valores de los parámetros α y β los métodos son de orden 2?
- b) ¿Existe alguna elección de α y β que proporcione un método de orden 3?
- c) Para la familia de métodos propuesta, calcúlese la función de estabilidad en términos de α y β .
- d) En el supuesto de que $|\alpha| < 2/3$ y de que $\beta = 0$, representérese la región de estabilidad del método.

(3 puntos)

2 Para el problema parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, l], t \geq 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

con condiciones de contorno homogéneas, se considera el método de RICHARDSON, que para la red habitual

$$x_0, x_1, \dots, x_N, \quad x_n = n \cdot h, \quad h = l/N,$$
$$t_0, t_1, \dots, t_m, \dots, \quad t_m = m \cdot k,$$

se escribe

$$u_{nm+1} - u_{nm-1} = 2\lambda(u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}),$$

siendo $u_{nm} \simeq u(x_n, t_m)$ y tomando $\lambda = \alpha^2 k/h^2$.

Utilícese el método de FOURIER para buscar, si existen, condiciones sobre λ que sean necesarias para la estabilidad del método.

(3 puntos)

3 Para estudiar el método de tipo RUNGE-KUTTA más adecuado para la integración de un problema mecánico se integra un problema test y se comparan los resultados numéricos de dos métodos, **m1** y **m2**. Los datos obtenidos se presentan en las tablas adjuntas.

¿Cuál es el que tiene mejor comportamiento? 'nfcn' representa el número de evaluaciones de función.

h	nfcn _{m1}	error _{m1}	log ₁₀ (error)
1/2	390	0.10710061210 ⁻¹	-1.970208044
1/2 ²	790	0.32475473710 ⁻⁴	-4.488444504
1/2 ³	1580	0.17326551310 ⁻⁶	-6.761287871
1/2 ⁴	3160	0.92103484210 ⁻⁹	-9.035723940
1/2 ⁵	6330	0.40580384510 ⁻¹¹	-11.39168384
1/2 ⁶	12670	0.16417416410 ⁻¹³	-13.78469518

Table 1: Método **m1**.

h	nfcn _{m2}	error _{m2}	log ₁₀ (error)
1/2	156	0.18842258210 ⁻¹	-1.724867048
1/2 ²	316	0.50113690310 ⁻²	-2.300043614
1/2 ³	632	0.43077124910 ⁻³	-3.365753290
1/2 ⁴	1264	0.29911412710 ⁻⁴	-4.524163074
1/2 ⁵	2532	0.18553236710 ⁻⁵	-5.731580312
1/2 ⁶	5068	0.11409754110 ⁻⁶	-6.942723712
1/2 ⁷	10136	0.70333217810 ⁻⁸	-8.152839512

Table 2: Método **m2**.

(1 punto)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 3 puntos)