

1 De entre los métodos de RUNGE-KUTTA implícitos de 2 etapas de tablero

α	α	0
β	δ	3δ
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

se buscarán los que sean de mayor orden y se dirá para qué valores de α , β y δ se alcanzan.

Se responderá a la misma pregunta en el caso $\alpha = 0$ (naturalmente con β y δ arbitrarios), caso del que nos ocupamos en lo que sigue.

En esta última situación $\alpha = 0$, se calculará la función de estabilidad de la familia de los métodos del tablero y se buscará en ella un método A -estable y otro que no lo sea, razonando por qué es así.

(3 puntos)

2 La idea es construir un par encajado **RK2(3)** empleando las 3 etapas del conocido método de orden 3 dado por el tablero

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

Compruébese que, con esas 3 etapas, se pueden encontrar infinitos métodos de orden 2 para completar el par, que se describirán por el sistema de ecuaciones que deban cumplir.

Es sabido, sin embargo, que no todos son válidos para completar un buen par encajado. ¿Qué condiciones se deben comprobar para que el método de orden 2 esté entre los que resultan adecuados? Busca un ejemplo concreto de método de orden 2, con las etapas dadas y que permita formar un buen par encajado con el método de orden 3 del enunciado.

(2 puntos)

3 Para un problema parabólico,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(l, t) = 0,$$

con condiciones de contorno homogéneas, consideramos los métodos 'hacia adelante' y 'hacia atrás' dados por

$$\frac{u_{nm+1} - u_{nm}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2}$$

y

$$\frac{u_{nm} - u_{nm-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m}}{h^2}$$

Se escribe el segundo para $m + 1$ en lugar de m y se toma la media aritmética de ambos (con coeficientes $1/2$ y $1/2$), obteniéndose así el conocido método de CRANK-NICOLSON del que se sabe que es estable con independencia de las relaciones entre h y k , incrementos en las variables x y t , respectivamente.

Si se eligen ahora para la media los coeficientes 2 y -1 , o bien los coeficientes -1 y 2 (el alumno elegirá, a su gusto, una de las dos parejas de coeficientes para la media), describese el método que resulta y lo que el método matricial afirma de la estabilidad en ese caso.

(3 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)