E.T.S. de Ingenieros Industriales **2002-03**
MÉTODOS MATEMÁTICOS I
EXAMEN ORDINARIO **(07/02/2003)**

1 Considérese el método explícito de RUNGE-KUTTA dado por el tablero

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & a_{21} & & \\ 1 & 0 & a_{32} & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

a) Dígase cuál es el orden máximo que se puede alcanzar y cuáles deben ser los coeficientes para alcanzar dicho orden.
b) De entre los métodos de orden máximo, dígase cuáles son los que minimizan el error de truncación.
c) Para la familia de métodos propuesta, calcúlese la función de estabilidad. Calcúlese la misma función para los métodos de orden máximo y para los que minimizan el error.

(2 puntos)

2 Para el problema elíptico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

en el dominio $[a,b] \times [c,d]$, con una condición de contorno adecuada, y con el retículo habitual

$$\begin{aligned} x_n &= a + h\,n\,, \quad h = \frac{b-a}{N}\,, \\ y_m &= c + k\,m\,, \quad k = \frac{d-c}{M}\,, \end{aligned}$$

se considera, poniendo $u_{nm} = u(x_n, y_m)$ el método en diferencias dado por

$$2\,(\lambda^2 + 1)\,u_{nm} - (u_{n+1\,m} + u_{n-1\,m}) - \lambda^2\,(u_{n\,m+1} + u_{n\,m-1}) = -h^2 f_{nm}\,,$$

con $\lambda = h/k$.

Dígase qué orden posee el error de truncación de dicho método. (*Sugerencia*: división por h^2.)

(3 puntos)

3 Para un problema de ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \qquad x \in [0, l], \quad t \geq 0\,,$$

(o sea hiperbólico) y para el retículo habitual

$$\begin{aligned} &h = \frac{l}{N}\,, \quad x_n = h\,n\,, \quad x_0 < x_1 < \cdots < x_N\,, \\ &k > 0\,, \quad t_m = k\,m\,, \quad t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\,, \end{aligned}$$

se emplea el método dado por la ecuación

$$u_{n\,m+1} - 2u_{nm} + u_{n\,m-1} + \frac{\lambda^2}{12}\left(u_{n+2\,m} - 16u_{n+1\,m} + 30u_{nm} - 16u_{n-1\,m} + u_{n-2\,m}\right) = 0\,,$$

procedente de aproximar $\delta^2 u/\delta t^2$ con una fórmula de derivación de 3 puntos y $\delta^2 u/\delta x^2$ con otra de 5 puntos. Aquí λ representa

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h}\,.$$

Usando el método de Fourier, búsquese la condición sobre λ para que el método sea estable.

(3 puntos)

(Recuérdese que las prácticas pueden alcanzar un valor de 2 puntos)